This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 5238.90

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1842.)

Synthetische Beweise

planimetrischer Sätze.

Von

W. Fuhrmann,

Professor am königl. Realgymnasium auf der Burg in Königsberg, Ostpreußen.

Mit 14 lithographischen Tafeln.

Berlin.

Verlag von Leonhard Simion.

1890.

Synthetische Beweise

planimetrischer Sätze.

Von

W. Fuhrmann,

Professor am königl. Realgymnasium auf der Burg in Königsberg, Ostpreußen.

Mit 14 lithographischen Tafeln.

Berlin.

Verlag von Leonhard Simion.

1890.

Synthetische Beweise

planimetrischer Sätze.

Von

W. Fuhrmann,
Professor am königl. Realgymnasium auf der Burg in Königsberg, Ostpreußen.

Berlin.
Verlag von Leonhard Simion.
1890.

Synthetische Beweise

planimetrischer Sätze.

Von

W. Fuhrmann,

Professor am königl. Realgymnasium auf der Burg in Königsberg, Ostpreußen.

Mit 14 lithographischen Tafeln.

Berlin.

Verlag von Leonhard Simion.

1890.

Synthetische Beweise

planimetrischer Sätze.

Von

W. Fuhrmann,

Professor am königl. Realgymnasium auf der Burg in Königsberg, Ostpreußen.

Mit 14 lithographischen Tafeln.

Berlin.

Verlag von Leonhard Simion.

1890.

Synthetische Beweise

planimetrischer Sätze.

Von

W. Fuhrmann,
Professor am königl. Realgymnasium auf der Burg in Königsberg, Ostpreußen.

Berlin.
Verlag von Leonhard Simion.
1890.

Math 5238.90
~~5258.90.5~~

HARVARD COLLEGE
MAY 17 1918
LIBRARY
Haven fund

Vorwort.

Es kann als anerkannte Wahrheit gelten, daß ein wichtiger Teil des mathematischen Unterrichts darin besteht, den Schülern Anleitung zur Auflösung mathematischer Aufgaben zu geben, wie ich dies bereits in meinem kleinen Werke „Wegweiser in der Arithmetik“ u. s. w. bemerkt habe. Nicht die tote Ansammlung geometrischer Kenntnisse ist das Ziel des mathematischen Unterrichts, sondern die Erlangung der Fähigkeit, durch eigene Untersuchungen zur weiteren Erkenntnis mathematischer Wahrheiten fortschreiten zu können. Es trägt dies indirekt dazu bei, die Erscheinungen der Natur von einem höheren Standpunkte zu verstehen. Die Fähigkeit, mathematische Aufgaben, besonders aber geometrische Aufgaben lösen zu können, wird häufig als ein besonderes Talent aufgefaßt. Einige Erfahrungen aus meiner Schulpraxis lassen mich schließen, daß betreffs der geometrischen Aufgaben diese Ansicht sogar von einigen Lehrern der Mathematik geteilt wird. Ich halte mich mit der Widerlegung dieser Ansicht in dem Vorwort um so weniger auf, als das vorliegende Werk dazu dienen soll. Daß es Aufgaben giebt, besonders geometrische, deren Lösung ein ungewöhnliches Maß von Kombinationsgabe verlangt, kann um so weniger geleugnet werden, als die synthetische Methode der Beweisführung trotz der gewaltigen Fortschritte, die sie zumal seit Steiner gemacht hat, als eine nicht ganz sichere anzusehen ist. Solche Aufgaben sind den Schülern selbstverständlich nicht zu stellen. Es wird aber stets möglich sein, Schüler, auch wenn sie nicht hervorragend begabt sind, zu synthetisch-geometrischen Untersuchungen anzuleiten, bei denen sie in mehr oder weniger beschränktem Maße ihre Selbständigkeit zeigen können. Es sind in neuerer Zeit verschiedene Sammlungen geometrischer Aufgaben verfaßt worden, deren Ziel das angegebene war, abgesehen von den Aufgabensammlungen, welche den betreffenden Lehrbüchern beigegeben waren. Ich nenne Gandtner und Junghaus, Lieber und Lühmann, G. Hoffmann, Martus u. a., dann aber ist besonders das Werk anzuführen: „Dr. Julius Petersen, Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben.“ Das Hauptverdienst dieses Werkes, das bereits in mehrere europäische Sprachen übersetzt ist, ist, daß die Aufgaben in Gruppen zusammengestellt, und daß zugleich die Grundgedanken der Lösung, die den verschiedenen Gruppen entsprechen, beigegeben sind. Es sei dabei noch

bemerkt, daß auch in den anderen Aufgabensammlungen eine solche Zusammenfassung der Aufgaben angebahnt ist, was der Einführung der Schüler in die Methode der Lösungen nur gute Dienste leisten kann.

In dem angegebenen Werk von Petersen sind nur Aufgaben im engeren Sinne gestellt worden, welcher Umstand nicht als nachteilig für dasselbe angesehen werden soll, da es den Zweck der Einführung in die Aufgabenlösung durchaus erfüllt. Es dürfte sich indessen aus pädagogischen Rücksichten doch sehr empfehlen, von den Schülern auch die Beweise von Lehrsätzen zu fordern, zumal in den ersten und den letzten Zeiten des mathematischen Schulunterrichts. Erst wenn der Schüler dahin geführt wird, selbständig Beweise zu suchen, erkennt er die Bedeutung derselben. Vorliegendes Werk stellt sich als Aufgabe, Fingerzeige zu geben, wie die Schüler zum selbständigen Finden von synthetischen Beweisen planimetrischer Sätze anzuleiten sind. Obwohl die synthetische Beweismethode hinter der analytischen in mancher Hinsicht zurücksteht, so ist klar, daß die Schüler zunächst in der synthetischen Methode geübt werden müssen, zumal wegen der mangelnden Vorkenntnisse die wenigsten Schüler zur analytischen Beweismethode gelangen.

Gespräche mit Fachgenossen sowie manche sonstigen Erfahrungen bestimmten mich, den Plan des vorliegenden Werks nach andern Principien festzustellen, als dies Petersen in seinem Werk gethan hat. Um in die „Methodik" der Beweise einzuführen, sind die Beweise vollständig gegeben; außerdem wurden die Gründe zu erforschen gesucht, weshalb diese oder jene Schlußfolgen gemacht, weshalb gewisse Hilfslinien gezogen wurden. Solche Anleitungen zu geben, dürfte besonders auch für angehende Lehrer wichtig sein, für die daher dies Werk in erster Linie geschrieben ist. Beim weiteren Fortschreiten konnten die zugehörigen Bemerkungen gekürzt werden. Indessen wurden doch die Beweise stets vollständig angegeben, nicht etwa, weil ich glaubte, daß die Beweise nicht ebenso oder besser von anderen gemacht werden könnten, sondern der Bequemlichkeit des Gebrauchs halber; denn es darf als Thatsache gelten, daß unter Umständen einem selbst Beweise einfacher Sätze augenblicklich nicht einfallen.

Ein Ziel dieses Werkes habe ich angegeben; dasselbe verfolgt aber noch ein anderes, das mit dem ersten zusammenhängt. Im Laufe der Zeit, besonders in den letzten Jahrzehnten sind eine Menge Sätze gefunden, welche, wenn sie auch nicht gerade von fundamentaler Bedeutung sind, doch durch ihre Form ein besonderes Interesse in Anspruch nehmen. Mit diesen, die in den gewöhnlichen Lehrbüchern meist nicht stehen, weitere Kreise bekannt zu machen, habe ich hier den Versuch gemacht. Bei der großen Menge, die sozusagen unter den Händen wächst, mußte natürlich eine Sichtung vorgenommen werden, nur die wichtigsten, die, von denen ich annahm, daß sie jeder Lehrer der Mathematik in den oberen Klassen wissen müßte, wurden aufgenommen, abgesehen von denen, welche für die Methode des Beweises von Wichtigkeit waren. Die Sätze dagegen, welche zu einem System der Geometrie gehören, die daher in jedem Lehrbuche zu finden sind, fanden hier nicht ihre Stelle. Zu diesen werden wohl manche auch die

Sätze von den vier merkwürdigen Punkten des Dreiecks, den Satz von Pascal, den Satz von Brianchon rechnen; wenn dies aber auch der Fall sein sollte, so glaubte ich doch die Beweise geben zu müssen, da in ihnen so recht zur Anschauung gelangt, wie ein Beweis gestaltet ist. — Da die Sätze, welche neuerdings durch Brocard angeregt sind, großes Interesse erregt haben, wofür als Beweis die verschiedenen Abhandlungen gelten können, welche neuerdings darüber erschienen sind (Artzt, Emmerich), so konnte ich es mir nicht versagen, in einem Anhange, der einen verhältnismäßig großen Umfang angenommen hat, die wichtigsten Sätze dieser Geometrie zu geben. Gerade dieser Stoff wächst zwar täglich; da indessen die neueren Untersuchungen mehr analytischer Natur sind, so ist für die eigentlich synthetischen Untersuchungen ein gewisser Abschluß erzielt. Es hat nun zwar Herr Professor Lieber in 3 Programmabhandlungen die wichtigsten Resultate ebenfalls zusammengestellt, indessen sind bei dieser Bearbeitung doch ganz andere Gesichtspunkte maßgebend gewesen. Eine Vergleichung der Arbeiten wird dies leicht erkennen lassen. Dazu kommt der Umstand, daß die Arbeit als Programmabhandlung weniger zugänglich ist. — Eigentlich sollte nur der elementare Teil behandelt werden, indessen hätte doch ein zu wichtiger Bestandteil gefehlt, wenn nicht wenigstens die Parabeln von Artzt und Kiepert und die Kiepertsche Hyperbel in den Kreis der Untersuchungen gezogen wären. Durch die Aufnahme dieses Kapitels erfuhren auch manche der anderen Sätze eine neue Beleuchtung und waren dadurch von besonderem Interesse; ich erwähne nur den Satz, daß die Kollineationachse zwischen dem Grunddreieck und dem ersten Brocardischen Dreieck senkrecht zur Verbindungslinie des Kollineationscentrums mit dem Punkte von Tarry ist.

Betreffs der Quellen, die ich benutzt, so nenne ich außer einigen gangbaren Lehrbüchern das Aufgabenrepertorium der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht von Hoffmann, die Nouvelles annales de mathématiques, zum Teil auch das Archiv der Mathematik und Physik; außerdem aber die Arbeiten von Artzt, Emmerich, Lieber, Kiehl, Neuberg. Ich muß endlich noch dankbar die Arbeit des Herrn Emile Vigarié erwähnen, insofern ich dadurch der Mühe überhoben war, über die Benennungen gewisser Punkte Nachforschungen anzustellen.

Daß die Arbeit nicht ohne Mängel sein wird, bin ich mir bewußt, indessen veranlaßte mich doch die Aufforderung eines Kollegen, dem ich gelegentlich ein kleines Heft mit eigenen Aufgaben zur Benutzung übergeben hatte, die Herausgabe vorliegenden Werks zu wagen und spreche hiermit die Hoffnung aus, daß dasselbe manchem von Nutzen sein wird. Mit dieser Hoffnung übergebe ich es der nachsichtigen Beurteilung meiner Kollegen.

W. Fuhrmann.

Druckfehlerberichtigung.

Seite	48	Zeile	1	von	oben ist (Fig. 24) zu streichen.
„	51	„	4	„	unten lies schon statt chon.
„	66	„	10	„	unten lies Zusammenhang statt Znsammenhang.
„	140	„	20	„	oben am Anfange ist da zu streichen.
„	140	„	21	„	oben lies Y_1L' statt Y_1L_1.
„	146	„	2	„	oben lies im Nenner $8\cos^2\varphi$ statt $8\cos 2\varphi$.
„	160	„	3	„	unten lies Nr. 58 statt Nr. 55.
„	162	„	8	„	oben lies Seite c statt Höhe c.
„	164	„	18	„	oben lies Parabeln statt Parabel.
„	165	„	6	„	oben lies Nr. 59 statt Nr. 56.
„	166	„	4	„	unten lies Punktepaare statt Punkte.
„	169	„	6	„	oben lies $\sqrt{1-8\lambda}$ statt $1-8\lambda$.
„	178	„	3	„	oben lies 90 statt 190.

In Fig. 56 ist B_0 statt B auf Seite AC zu setzen.

Inhaltsverzeichnis.

Teil I. Angabe allgemeiner Ziele und Regeln; die verschiedenen Methoden und Hilfsmittel bei den Beweisen.

Seite

A. Einleitende Bemerkungen und die Grundsätze 1

1. Die beiden Hauptarten der Sätze 1
2—3. Die Fundamentalgebilde 1
4. Die verschiedenen Aussagen über die Gebilde 1
5. Teile des Lehrsatzes 2
6. Umkehr eines Satzes 2
7—13. Die Grundsätze über die Größe und Lage der Gebilde 2
14—15. Einige Ergänzungen betreffs der Bestimmung von Punkten . . 6
16. Punkte in der Unendlichkeit 7
17. Bestimmung des Punktes und der Geraden mittelst eines Kreises . 7

B. Die Gegenstände und Hauptziele bei den Sätzen; die verschiedenen Methoden bei den Beweisen 8

18. Abhängigkeit der Gebilde im allgemeinen 8
19—20. Abhängigkeit von Größengebilden 8
21. Abhängigkeit von den fundamentalen Gebilden der Lage 8
22. Der Kreis 8
23—29. Allgemeine Ziele, die sich auf mehrere Grundgebilde beziehen . 9
30—31. Aussagen betreffs der Gleichheit der Größengebilde 10
32. Zusammenfassen von Eigenschaften der Größengebilde 11
33. Ungleichheit der Größengebilde. 12
34—39. Aussagen über die fundamentalen Gebilde der Lage; geometrische Örter, Enveloppen 12
40. Aussagen mit Hinzunahme des Kreises 14
41. Übersichtliche Darstellung verwickelter Eigenschaften 14
42—43. Erweiterung und Ausdehnung von Eigenschaften 14
44. Specialisierung von Eigenschaften 15
45. Induktion und Deduktion 16
46. Synthetische und analytische Methode 16
47. Direkte und indirekte Beweise 16
48. Der Gang des Beweises im allgemeinen 17

Seite

C. Einige allgemeine Regeln zur Erlangung von Übung in den Beweisen und die wichtigsten Hilfsmittel derselben 17

49—50. Klare Anschauung der Grundsätze und der Fundamentalsätze; Umformung der Sätze 17
51—52. Es darf kein Gebilde durch mehr Bedingungen bestimmt werden, als die Anzahl der bestimmenden Bedingungen beträgt 18
53—54. Die Hilfslinien und Hilfsgrößen 19
55. Der Satz erscheint als specieller Fall eines allgemeinern 19
56. Trigonometrische Hilfsgrößen 20
57. Anschluß direkter Folgerungen an die Hilfslinien 20
58—59. Angabe der wichtigsten Hilfslinien 20
60. Unsicherheit der synthetischen Methode 21

Teil II. Erläuterung der Beweismethoden durch Beispiele.

A. Erste Stufe. Grundsätze, Fundamentalsätze über die Parallelen, das gleichschenklige Dreieck, Kongruenz der Dreiecke, Peripheriewinkelsatz 22

1—2. Anwendung von Grundsätzen 22
3—8. Sehr einfache Sätze zur Übung 22
9. Wenn man in einem gleichschenkligen Dreieck eine der gleichen Seiten verlängert, die andere um eine ebensolche Strecke verkürzt und die erhaltenen Endpunkte verbindet, so wird die Verbindungslinie durch die Grundlinie halbiert 25
10. Die Mittelpunkte der Seiten eines Vierecks bilden die Ecken eines Parallelogramms 26
11—14. Die Sätze von den 4 merkwürdigen Punkten des Dreiecks . . 27
15. Wenn man in einem Dreieck die Höhen bis zum Umkreise verlängert, so sind die erhaltenen Verlängerungen gleich den untern Höhenstücken 29
16. Im Dreieck aus den Höhenfußpunkten eines Grunddreiecks sind die Höhen dieses letzteren Halbierungslinien der Winkel 30
17. Der Satz vom Feuerbachschen Kreise 31
18. Wenn man um ein gleichseitiges Dreieck den Kreis beschreibt und einen Punkt des Kreises mit den Ecken verbindet, so ist die eine Verbindungslinie gleich der Summe der beiden andern 32
19. Die Fußpunkte der Lote, welche von 2 Ecken eines Dreiecks kreuzweise auf die Halbierungslinien ihrer Winkel gefällt werden, liegen in der der dritten Ecke entsprechenden Berührungssehne des Inkreises 33
20. Zeichnet man über den Seiten eines Dreiecks gleichseitige Dreiecke und verbindet die Spitzen derselben mit den Gegenecken der betreffenden Grundlinien im ursprünglichen Dreieck, so schneiden sich die Verbindungslinien desselben in einem Punkte, welcher die Eigenschaft hat, daß die Verbindungslinien desselben mit den Ecken einen Winkel von 120° bilden (wenn kein Dreieckswinkel 120° überschreitet). Die Verbindungslinien der angegebenen Spitzen mit den Ecken des Grunddreiecks sind ferner gleich lang 33
21. Folgerungen 35

Seite

22. Trägt man an die Höhen eines Dreiecks in den Ecken desselben immer gleiche Winkel entsprechend an, so entsteht durch die neuen Schenkel der angetragenen Winkel ein dem Grunddreieck ähnliches Dreieck, dessen Mittelpunkt des Umkreises der Höhenschnittpunkt des Grunddreiecks ist 35

B. Zweite Stufe. Untersuchung über zusammenhängende Eigenschaften des Dreiecks in Bezug auf die Berührungskreise desselben. Anwendung von Proportionen. Sätze über Flächen. Längen werden gelegentlich mit Zeichen versehen 36

23—24. Erklärungen und Bezeichnungen 36

25—27. Sätze über die Differenz von 2 Dreieckswinkeln 37

28. Relationen über die Längen, welche auf den Seiten durch die Berührungspunkte der Berührungskreise bestimmt werden 38

29. Wenn man in einem Dreieck die Halbierungslinie eines Winkels bis zum Umkreise verlängert, so ist der Schnittpunkt von den Endpunkten der Gegenseite ebensoweit entfernt, als vom Mittelpunkte des Inkreises, als auch vom Mittelpunkte des der Gegenseite angehörigen Ankreises. Ausdehnung des Satzes 39

30. In jedem Dreieck ist $\rho' + \rho'' + \rho''' - \rho = 4r$ 40

31. Ebenso $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} + \frac{1}{\rho'''} = \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''}$ 41

32. Ebenso $MM_a + MM_b + MM_c = r + \rho$,
$MM_b + MM_c - MM_a = \rho' - r$, u. s. w. 42

33. Bezeichnet man den Abstand des Mittelpunktes des Inkreises vom Mittelpunkt des Umkreises mit d, so gilt die Relation $d^2 = r^2 - 2r\rho$. (Entsprechend auch $d'^2 = r^2 + 2r\rho'$, u. s. w.) 43

34. Hat man 2 Kreise von solcher Beschaffenheit, daß es ein Dreieck giebt, welches dem einen Kreise umschrieben, dem andern eingeschrieben ist, so giebt es unendlich viele solcher Dreiecke 44

35. $4t'^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$,
$4t''^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$,
$4t'''^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$ 45

36. In jedem Viereck ist das vierfache Quadrat der Verbindungslinie der Mittelpunkte von 2 Gegenseiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen plus der Summe der Quadrate der andern Gegenseiten weniger der Summe der Quadrate dieses Gegenseitenpaars . . . 45

37. In jedem Kreisviereck ist das Quadrat der Verbindungslinie der Schnittpunkte der Gegenseiten gleich der Summe der Quadrate der Tangenten an den Endpunkten 46

38. In jedem Dreieck ist das Produkt von Höhe und Durchmesser, ebenso das Produkt der Winkelhalbierungslinie und der ganzen bis zum Umkreise verlängerten Sehne gleich dem Produkt der einschließenden Seiten, ferner das Produkt des verlängerten Stücks der Winkelhalbierungslinie mit dieser selbst gleich dem Quadrat der Entfernung des Bogenmittelpunktes von einem Endpunkte der dritten Dreiecksseite 47

Seite

39. Halbiert man in einem rechtwinkligen Dreieck einen spitzen Winkel und verlängert die Halbierungslinien bis zum Umkreise, so ist diese Halbierungssehne die mittlere Proportionale zwischen dem Radius des Umkreises und der Summe der einschließenden Seiten 47

40. Teilt man die Seiten eines Dreiecks fortlaufend nach einem bestimmten Verhältnis und verbindet die erhaltenen Teilpunkte, so ist der Schwerpunkt des dadurch erhaltenen Dreiecks der Schwerpunkt des ursprünglichen Dreiecks 48

41. Wenn man in einem Kreisviereck die beiden Diagonalen zieht, dann die 4 Dreiecke aus je 2 Seiten des Kreisvierecks und einer Diagonale bestimmt, so bilden die Mittelpunkte der Inkreise dieser 4 Dreiecke die Ecken eines Rechtecks 50

42. In jedem Viereck liegt der Schwerpunkt S, der Schnittpunkt O der Verbindungslinien der Mittelpunkte von den Gegenseiten und der Schnittpunkt E der Diagonalen in einer Geraden, wobei O die Strecke SE nach dem Verhältnis 1 : 3 teilt 50

43. Wenn man in einem Kreise auf einem Durchmesser 2 Punkte A und B gleich weit vom Mittelpunkte O annimmt, einen beliebigen Punkt P der Peripherie mit denselben verbindet, wodurch man die Schnittpunkte C und D dieser Linien mit dem Kreise erhält, dann den Schnittpunkt N von CD und AB, endlich auch den Gegenpunkt Q zu P auf dem Kreise bestimmt, so ist NQ Tangente des Kreises . . . 51

44. Das Parallelogramm, dessen Ecken die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen konvexen Vierecks sind, ist halb so groß als das Viereck . 52

45. Der Inhalt des Dreiecks ist

$$\tfrac{1}{8}\sqrt{(t'+t''+t''')\,(t''+t'''-t')\,(t'''+t'-t'')\,(t'+t''-t''')} \quad . \quad . \quad . \quad 52$$

46. Wenn man in und um ein Dreieck 2 Dreiecke konstruiert, so daß je 2 Seiten dieser Dreiecke parallel sind, so ist das erste Dreieck das geometrische Mittel zwischen den beiden andern 53

47. Nimmt man auf den Seiten eines Dreiecks ABC solche Punkte L, L_1, M, M_1, N, N_1 an, daß $BL = L_1C$, $CM = M_1A$, $AN = N_1B$ ist, so sind die Dreiecke LMN und $L_1M_1N_1$ einander gleich 54

48. Fällt man von einem Punkte innerhalb eines Dreiecks die Lote auf die Seiten und bestimmt die Höhen, so ist die Summe der Verhältnisse der Lote zu den entsprechenden Höhen gleich 1 54

49. Wenn man in einem Dreieck ABC die Schwerlinie AA_0 von der Ecke A zieht, dieselbe um sich selbst bis A′ verlängert, ferner die Winkelhalbierungslinie an derselben Ecke bestimmt, welche BC in D treffe, so hat jeder Punkt der Geraden A′D die Eigenschaft, daß, wenn man durch ihn die Parallelen zu AB und AC zieht, die Stücke derselben innerhalb der Winkelräume von B und C gleich sind . . 55

50. Man habe 2 Kreise mit den Mittelpunkten A und C, die sich in B von außen und eine Gerade in den Punkten D und E berühren; zieht man hier durch B eine beliebige Sekante, welche die Kreise zum zweiten Male in F und G schneidet, so werden sich FD und GE in H rechtwinklig schneiden und HB ist senkrecht zu FG . . 55

Seite

C. Dritte Stufe. Benutzung aller möglichen Hilfsmittel, der trigonometrischen Funktionen, der harmonischen und projektivischen Gebilde. Darstellung von zusammenhängenden Eigenschaften von Figuren . . 56

Vorbemerkung 56

51. Erklärung der Gegentransversalen, der Gegenpunkte, der isogonalen Verwandtschaft 56

a) Vereinzelte Sätze 57

52. Die Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den Berührungspunkten schneiden sich in einem Punkte (Punkt von Gergonne) . . 57

53. Die Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den Berührungspunkten der zugehörigen Ankreise schneiden sich in einem Punkte (Punkt von Nagel). Dieser Punkt, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt des Inkreises liegen in einer Geraden 58

54. Fällt man von 2 Ecken eines Dreiecks die Lote auf die Halbierungslinie des Winkels der dritten Ecke, so wird dieselbe durch die Fußpunkte harmonisch geteilt 58

55. Bestimmt man zu einem Dreieck ABC das Mittendreieck $A_0B_0C_0$, dann den Inkreis dieses Dreiecks, der die Seiten desselben in A′,B′,C′ berührt, dann sind die Dreiecke ABC und A′B′C′ kollinear; das Kollineationscentrum ist der Nagelsche Punkt von ABC und die Verbindungslinie desselben mit dem Schwerpunkt ist senkrecht zur Kollineationsachse 59

56. Wenn man von 2 Punkten die Polaren in Bezug auf einen Kreis nimmt und von jedem Punkte die Lote auf die Polare des anderen Punktes fällt, so verhalten sich diese wie die Entfernungen der betreffenden Punkte vom Mittelpunkt 60

57. Es seien in der Ebene eines Kreises 2 parallele Gerade L und N gegeben; durch einen beliebigen Punkt auf der einen zieht man 2 Tangenten an den Kreis, welche auf der andern ein Segment AB bestimmen; man soll beweisen, daß die Verbindungslinie von P mit dem Mittelpunkt von AB stets durch denselben Punkt geht, wie man auch P verändert 60

58. Ein Kreissechseck mit den aufeinander folgenden Seiten a, c′, b, a′, c, b′ habe die Hauptdiagonalen e, f, g, dann gilt die Gleichung $efg = aa'e + bb'f + cc'g + abc + a'b'c'$ 61

59. Wenn man in einem Dreieck die Fußpunkte von 2 Winkelhalbierungslinien verbindet und von einem beliebigen Punkte der so erhaltenen Geraden die Lote auf die Seiten fällt, so ist immer ein Lot gleich der Summe der beiden andern 61

60. Halbiert man in einem Dreieck die inneren und äußeren Dreieckswinkel, so werden auf den bezüglichen Gegenseiten Stücke E_a, E_b, E_c abgeschnitten, für welche mit Berücksichtigung einer bestimmten Zeichenregel die Relation gilt:

$$\frac{1}{E_a} + \frac{1}{E_b} + \frac{1}{E_c} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 63$$

61. Wenn man durch den Schwerpunkt S eines Dreiecks eine Transversale legt, welche die Seiten des Dreiecks in den Punkten U, V, W schneidet, so findet die Relation statt:

$$\frac{1}{SU} + \frac{1}{SV} + \frac{1}{SW} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 63$$

Seite

62. Wenn man 2 Kreise hat, die sich nicht schneiden, also ein Kreisbüschel mit 2 Grenzpunkten bestimmen, eine Tangente an den einen Kreis zieht, die den andern Kreis schneidet, und man einen der Grenzpunkte mit dem Berührungspunkt der Tangente und mit den Schnittpunkten der Geraden mit dem andern Kreise verbindet, so wird immer der Winkel, den die letzten Geraden bilden, durch die erste Verbindungslinie halbiert 64
63. Pascalscher Satz 64
64. Brianchonscher Satz 66
65. Der Feuerbachsche Kreis eines Dreiecks berührt den Inkreis und die Ankreise 67

b) Die Simsonsche Gerade 68

66. Verbindet man einen Punkt der Peripherie des Umkreises eines Dreiecks mit den Ecken und bestimmt die Gegentransversalen der Verbindungslinien, so sind dieselben parallel 68
67. Die Simsonsche Linie eines Punktes des Umkreises ist senkrecht zur Richtung, welche die Gegentransversalen der durch den Punkt gezogenen Ecktransversalen haben 68
68. Verbindet man einen Peripheriepunkt des Umkreises eines Dreiecks mit dem Höhenschnittpunkt desselben, so wird diese Strecke durch die dem Punkte angehörige Simsonsche Linie halbiert 68
69. Sind 2 Punkte die Endpunkte eines Durchmessers des Umkreises, so sind die zugehörigen Simsonschen Linien senkrecht zu einander . . . 69
70. Der Schnittpunkt von 2 Simsonschen Linien, deren Peripheriepunkte die Endpunkte eines Durchmessers sind, liegt auf dem Feuerbachschen Kreise 69

c) Das vollständige Viereit 70

71. Die Mittelpunkte der Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in einer Geraden 70
72. Die Kreise um die 4 Dreiecke eines vollständigen Vierseits schneiden sich in einem Punkte 71
73. Die Mittelpunkte der Umkreise von den Dreiecken eines vollständigen Vierseits liegen auf einem Kreise, der auch durch den Schnittpunkt der angegebenen Kreise geht 71
74. Weitere Folgerungen 71
75. Die Kreise, deren Durchmesser die Diagonalen eines vollständigen Vierseits sind, gehören zu einer Schar. Satz von Bodenmiller . . . 72
76. Die Höhenschnittpunkte der 4 Dreiecke, welche ein vollständiges Vierseit enthält, liegen in einer Geraden 73

d) Sätze über Vierecke verschiedener Art 74

77. Der Inhalt eines Kreisvierecks mit den Seiten a, b, c, d ist, wenn $a+b+c+d=2p$ gesetzt wird, durch den Ausdruck gegeben:

$$\sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)} \quad \ldots \ldots \quad 75$$

78. Der Inhalt J eines Vierecks mit den Seiten a, b, c, d und der Summe 2ω von 2 Gegenwinkeln ist durch die Formel gegeben:

$$J^2=(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)-abcd\cos^2\omega \quad \ldots \quad 76$$

79. Zu einem Kreisviereck mit 4 gegebenen Seiten gehören 3 Diagonalen 76

Seite

80. Der Inhalt eines Kreisvierecks ist gleich dem Produkt der 3 Diagonalen dividiert durch den vierfachen Radius 77
81. Ist ein Viereck nach den Ecken und Seiten zugleich centrisch, so wird jede Seite durch den Berührungspunkt des Inkreises nach dem Verhältnis der anstoßenden Seiten geteilt 78
82. Die Verbindungslinien der Berührungspunkte des Inkreises auf den Gegenseiten eines nach den Seiten und Ecken centrischen Vierecks halbieren die Winkel der Diagonalen 78
83. Sind a, b, c, d die Seiten eines nach den Ecken und Seiten centrischen Vierecks, so ist der Inhalt J durch die Formel gegeben:
$$J = \sqrt{abcd} \quad . \quad . \quad .

Seite

96. Fällt man von einem Punkte einer Ecktransversale die Lote auf die anstoßenden Seiten, so ist die Verbindungslinie der Fußpunkte senkrecht zur Gegentransversale 93
97. Fällt man von 2 Punkten, die auf 2 Gegentransversalen liegen, die Lote auf die anstoßenden Seiten, so ist das Produkt der Lote auf die eine Seite gleich dem Produkt der Lote auf die andere Seite . 93
98. Das Produkt der Verhältnisse, das 2 Gegentransversalen auf der Gegenseite bestimmen, ist gleich dem Verhältnis der Quadrate der anliegenden Seiten 94
99. Die Fußpunkte der Lote von 2 Gegenpunkten liegen auf einem Kreise 94
100. Verbindet man 2 Winkelgegenpunkte mit 2 Ecken eines Dreiecks, so ist die Summe der entstandenen Winkel gleich der Summe von 180° und dem Winkel an der dritten Ecke 94

g) Von der Symmediane und dem Punkte von Lemoine . 95

101. Die Symmediane teilt die Gegenseite nach dem Verhältnis der Quadrate der anliegenden Seiten 95
102. Der Punkt, in welchem die Tangente, welche an den Umkreis in einer Ecke gezogen wird, die Gegenseite schneidet, ist der Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch die Fußpunkte der innern und äußern Winkelhalbierungslinie an der betreffenden Ecke geht (Apollonischer Kreis) . 96
103. Die Symmedianen gehen durch die Pole der Gegenseiten in Bezug auf den Umkreis 96
104. Die Schnittpunkte der Tangenten an den Ecken mit den Gegenseiten sind die Pole der Symmedianen in Bezug auf den Umkreis . . . 96
105. Die harmonischen Punkte auf den Symmedianen 97
106. Die Gerade von Lemoine oder die Polare des Punktes von Lemoine 97
107. Das durch die Schnittpunkte der Symmedianen auf dem Umkreise bestimmte Dreieck hat denselben Punkt von Lemoine wie das Grunddreieck, kann daher als kosymmedian mit demselben bezeichnet werden 97
108—109. Sätze über die Schnittpunkte von kosymmedianen Dreiecken . 98
110. Die Lote vom Punkte von Lemoine auf die Seiten verhalten sich wie diese Seiten 99
111. In dem Dreieck, dessen Ecken die Fußpunkte der Lote vom Punkte von Lemoine auf die Seiten des Grunddreiecks sind, ist der Punkt von Lemoine der Schwerpunkt 99
112. Die Länge der zur Seite a gehörigen Symmediane ist gegeben durch $\frac{2bct'}{b^2 + c^2}$ 99
113. Der Punkt von Lemoine hat die Eigenschaft, daß die Summe der Quadrate der Entfernungen von den Seiten ein Minimum ist . . 100
114. Die Verbindungslinien der Mitten der Seiten mit den Mitten der Höhen schneiden sich im Punkte von Lemoine 101
115. Zieht man in einem Dreieck die 3 Schwerlinien und die 3 Kreise durch je 2 Ecken und den Schwerpunkt, so ist der Mittelpunkt des Umkreises des ursprünglichen Dreiecks der Schwerpunkt des durch die 3 Mittelpunkte bestimmten Dreiecks und der Schwerpunkt des ersten Dreiecks der Punkt von Lemoine des zweiten Dreiecks 101

Seite

h) Einige Kreisscharen beim Dreieck 102

116. Die Apollonischen Kreise (102) des Dreiecks bilden eine Schar. Ihre Schnittpunkte heißen die isodynamischen Centra des Dreiecks . . . 102

117. Die Fußpunkte der Lote, die von den isodynamischen Centren auf die Seiten gefällt werden, bilden ein gleichseitiges Dreieck 103

118. Die isodynamischen Centra sind die Gegenpunkte von den Punkten, welche man erhält, wenn man über den Seiten gleichseitige Dreiecke zeichnet und die Spitzen derselben mit den bezüglichen Ecken des Grunddreiecks verbindet 103

119. Nimmt man ein isodynamisches Centrum als Mittelpunkt eines Transformationskreises an und transformiert die Ecken mittelst des Princips der reciproken Radien, so ist das dadurch bestimmte Dreieck gleichseitig 104

120. Die Potenzlinie zwischen dem Umkreise und dem Feuerbachschen Kreise ist die Kollineationsachse zwischen dem Grunddreieck und dem Höhenfußpunktdreieck 104

121. Das Lot vom Höhenschnittpunkt auf eine Schwerlinie geht durch den Punkt, in welchem die der Schwerlinie entsprechende Seite durch die entsprechenden Seiten des Höhenfußpunktdreiecks geschnitten wird . . 104

122. Der Kreis, dessen Durchmesser die Strecke der Eulerschen Geraden zwischen dem Schwerpunkt und dem Höhenschnittpunkt ist, gehört zu der Schar, welche durch den Umkreis und den Feuerbachschen Kreis bestimmt ist 105

123. Der Polarkreis, d. h. der Kreis, für den das Dreieck ein harmonisches Tripel ist, gehört zur Schar der Nr. 122 105

124. Der Kreis durch die Pole der Seiten in Bezug auf den Umkreis gehört zur Schar der Nr. 122 106

125. Zieht man in einem Dreieck ABC die Mittelsenkrechten zu den Seiten und bestimmt die Schnittpunkte mit den andern Seiten, wodurch man 2 Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ erhält, so gehören die Umkreise dieser Dreiecke und der Umkreis von ABC zu einer Schar 106

i) Beziehungen eines Grunddreiecks zu dem Dreieck, dessen Ecken die Spiegelpunkte der zu den Seiten gehörigen Umkreisbogenmittelpunkte sind 107

126. Erklärung. Das Spiegeldreieck. Bezeichnung 107

127. Das Spiegeldreieck ist dem Bogenmittendreieck ähnlich, und der zum Spiegeldreieck gehörige Umkreis geht durch den Höhenschnittpunkt und den Punkt von Nagel 107

128. Ist P der Mittelpunkt des Umkreises vom Spiegeldreieck, N der Punkt von Nagel, so ist bei Annahme der frühern Bezeichnung POMN ein Parallelogramm 108

129. Die von den Ecken des Grunddreiecks auf die entsprechenden Seiten des Spiegeldreiecks gefällten Lote schneiden sich in einem Punkte R, und die Kollineationsachse zwischen dem Bogenmittendreieck und dem Spiegeldreieck ist die Mittelsenkrechte von OR 108

130. Schneidet man auf den Höhen, von den Ecken gerechnet, den Durchmesser des Inkreises ab, so erhält man dadurch die Ecken eines

Seite

Dreiecks $A_4B_4C_4$, das dem Grunddreieck ähnlich und dem Umkreise des Spiegeldreiecks eingeschrieben ist 109

131. Der Mittelpunkt des Inkreises hat für das in Nr. 130 gefundene Dreieck $A_4B_4C_4$ und das Grunddreieck gleiche Bedeutung, ebenso für das Bogenmittendreieck und das Spiegeldreieck 109

132. Hilfssatz für harmonische Punkte 109

133. Wenn man die Ecken des Spiegeldreiecks mit dem Mittelpunkt des Inkreises verbindet und die Schnittpunkte der erhaltenen Geraden mit den entsprechenden Seiten des Grunddreiecks bestimmt, so haben diese Schnittpunkte gleiche Potenz in Bezug auf den Inkreis und den Feuerbachschen Kreis 110

134. Die Entfernung OR, d. h. des Mittelpunktes des Inkreises vom Schnittpunkte der Lote von den Ecken auf die entsprechenden Seiten des Spiegeldreiecks ist gleich dem Durchmesser des Inkreises . . . 110

135. Die Kollineationsachse UVW des Bogenmittendreiecks mit dem Spiegeldreieck ist Tangente an den Umkreis und Potenzlinie zwischen dem Umkreise des Spiegeldreiecks und dem Mittelpunkte des Inkreises . 110

136. Die Kreise, welche durch O um die Punkte U_1, V_1, W_1, d. h. die Schnittpunkte der Verbindungslinien A_2O, B_2O, C_2O (Nr. 133) mit den Seiten des Dreiecks als Mittelpunkten geschlagen werden, schneiden den Umkreis des Spiegeldreiecks rechtwinklig 111

137. Der Feuerbachsche Kreis berührt den Inkreis 111

138. Die Lote von den Ecken des Bogenmittendreiecks auf die entsprechenden Seiten des Spiegeldreiecks schneiden sich in einem Punkte L, der dem Punkte von Nagel auf dem Umkreise des Spiegeldreiecks entspricht, auch auf der Geraden MN d. h. der Verbindungslinie des Punktes von Nagel mit dem Mittelpunkte des Umkreises liegt . . 112

139. Die Lote von den Ecken des Grunddreiecks auf die entsprechenden Seiten des Dreiecks, das durch die Abschnitte des Durchmessers des Inkreises auf den Höhen (131) erhalten wird, schneiden sich in einem Punkte T des Umkreises vom Grunddreieck, der dem Höhenschnittpunkt H auf dem Umkreise in Beziehung auf das Grunddreieck entspricht 112

140. Die Gegentransversalen der nach dem Punkte L (Nr. 138) hingehenden Ecktransversalen des Grunddreiecks sind senkrecht zum Durchmesser HN des Umkreises vom Spiegeldreieck 112

141. Die Kollineationsachse des Grunddreiecks mit dem durch die Abschnitte auf den Höhen erhaltenen Dreiecke ist senkrecht zu HT (Nr. 139) . 113

Anhang.

Teil 1. Die grundlegenden und elementaren Eigenschaften der Brocardschen Geometrie 115

1. Erklärung und Bezeichnung 115

2. Einführung der Brocardschen Punkte und des Brocardschen Winkels ω 115

Seite

Die Relationen:

$$\cot\omega = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$$ 115

3—4. Konstruktionen der Brocardschen Punkte L′ und L″ 116

5. Die Relation $\Sigma \sin\alpha \cos(\alpha + \omega) = 0$ 117

6. Die Größe des Brocardschen Winkels ω 117

7. Das erste Brocardsche Dreieck und der Brocardsche Kreis 118

8. Zieht man durch die Ecken des ersten Brocardschen Dreiecks die Parallelen zu den entsprechenden Seiten des Grunddreiecks, so schneiden sich dieselben im Punkte von Lemoine 119

9. Der Abstand des Mittelpunktes des Umkreises vom Punkte von Lemoine ist ein Durchmesser des Brocardschen Kreises (Brocardscher Durchmesser) 119

10. Die Verbindungslinie der Brocardschen Punkte (Brocardsche Gerade) ist senkrecht zum Brocardschen Durchmesser (9) 119

11. Das Grunddreieck ist kollinear zum ersten Brocardschen Dreieck; die Entfernungen des Kollineationscentrums von den Seiten sind den dritten Potenzen der Seiten umgekehrt proportional 119

12. Das Grunddreieck und das erste Brocardsche Dreieck (A′B′C′) haben denselben Schwerpunkt 120

13. Bestimmt man die Spiegelpunkte der Ecken des ersten Brocardschen Dreiecks in Beziehung auf die Seiten des Grunddreiecks, so erhält man ein Dreieck $A_\omega B_\omega C_\omega$, das mit dem Grunddreieck kollinear ist; das Kollineationscentrum ist der Winkelgegenpunkt des Mittelpunktes der Strecke zwischen den Brocardschen Punkten 121

14. Der Schwerpunkt des Dreiecks, dessen Ecken das Kollineationscentrum S des Grunddreiecks mit dem Brocardschen Dreieck und die Brocardschen Punkte L′, L″ sind, ist der Schwerpunkt des Grunddreiecks . . 122

15. Der Winkelgegenpunkt T von S ist der Pol der Brocardschen Linie in Bezug auf den Brocardschen Kreis 123

16. Die Geraden MT und SH sind parallel 123

17. Berechnungen:

a) $\overline{L'L''}^2 = 4r^2\sin^2\omega\,(1 - 4\sin^2\omega)$,

b) $ML^2 = r^2(1 - 3\operatorname{tg}^2\omega)$,

c) $TM : SM = 1 : 2\cos 2\omega$,

d) $BS_\alpha : S_\alpha C = b^2 : c^2$,

e) $AS_\alpha^2 = \dfrac{4r^2\sin^4\alpha\sin(\alpha + 3\omega)}{\sin(\alpha - \omega)\sin^2(\alpha + \omega)}$,

f) $AS^2 = 4r^2\sin(\alpha + 3\omega)\sin(\alpha - \omega)$,

g) $MS = \dfrac{r\cos 3\omega}{\cos\omega} = r(1 - 4\sin^2\omega)$ 123

18. Die Abstände des Kollineationscentrums S von den Seiten sind

$$SS_a = \frac{2r\sin^3\omega}{\sin(\alpha - \omega)} \text{ u. s. w.} \quad \text{. . . . . 127}$$

19. Fällt man von den Ecken des Grunddreiecks auf die entsprechenden Seiten des ersten Brocardschen Dreiecks die Lote, so schneiden sich dieselben in einem Punkte N, der zu den Ecken des Grunddreiecks

Seite

dieſelbe Lage hat, als der Mittelpunkt des Umkreiſes zu den Ecken des erſten Brocardſchen Dreiecks (Punkt von Tarry) 128

20. Die Abſtände des Punktes N von Tarry von den Seiten ſind:

$$NN_a = \frac{-2r\cos(\beta+\omega)\cos(\gamma+\omega)}{1-4\sin^2\omega},$$ u. ſ. w. 128

21. Die Punkte N und S liegen mit dem Mittelpunkt M des Umkreiſes in einer Geraden 129

22. Die Punkte N und T liegen mit dem Höhenſchnittpunkt H in einer Geraden 130

23. Die Abſchnitte, die man durch die Seiten des erſten Brocardſchen Dreiecks auf den Seiten des Grunddreiecks erhält:

$$B\mathfrak{A} = \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\sin(\gamma-2\omega)}{\sin(\gamma-\beta)\sin 2\omega},$$ u. ſ. w. 131

24. Die Kollineationsachſe $\mathfrak{ABC}$ zwiſchen dem Grunddreieck und dem erſten Brocardſchen Dreieck iſt ſenkrecht zu ST 133

25. Die Potenzlinie des Umkreiſes und des Brocardſchen Kreiſes iſt die Polare des Punktes von Lemoine in Bezug auf den Umkreis. (Gerade von Lemoine.) Das zweite Brocardſche Dreieck 133

26. Die Verbindungslinien der entſprechenden Ecken des erſten und zweiten Brocardſchen Dreiecks ſchneiden ſich im Schwerpunkt des erſten Dreiecks 134

27. Die Lote, welche von den Mitten der Seiten des erſten Brocardſchen Dreiecks auf die entſprechenden Seiten des Grunddreiecks gefällt werden, ſchneiden ſich im Mittelpunkt des Feuerbachſchen Kreiſes . . 134

28. Wenn man in einem Dreieck die Schwerlinien bis zum Umkreiſe verlängert, dann die Spiegelpunkte zu den Schnittpunkten in Bezug auf die entſprechenden Seiten nimmt, dann ſind dieſe Spiegelpunkte die Ecken eines Dreiecks, das dem zweiten Brocardſchen Dreieck ähnlich und ähnlich gelegen iſt 134

29. Die Symmedianen beſtimmen durch die Schnittpunkte mit dem Umkreiſe ein Dreieck, das dem Dreieck aus den Schwerlinien des Grunddreiecks ähnlich iſt. Beſtimmt man ferner die Spiegelpunkte der Ecken des angegebenen Dreiecks in Bezug auf die Seiten des Grunddreiecks, ſo erhält man die Ecken eines Dreiecks, das ebenfalls dem aus den Schwerlinien gebildeten ähnlich iſt 135

30. Wenn man durch den Punkt von Lemoine die Parallelen zu den Seiten zieht, ſo erhält man auf dieſen 6 Punkte, welche auf einem Kreiſe liegen. (Der erſte Kreis von Lemoine oder der Kreis von Tucker.) 135

31. Die 6 Punkte in Nr. 30 beſtimmen, paſſend gewählt, 2 einander kongruente Dreiecke, welche beide den Punkt von Lemoine als einen Brocardſchen haben, während der andere Brocardſche Punkt je einer der Brocardſchen Punkte des Grunddreiecks iſt 136

32. Der erſte Kreis von Lemoine und der Brocardſche Kreis ſind koncentriſch. Der Radius des erſten Kreiſes iſt $r : 2\cos\omega$ 137

33. Legt man durch den Punkt von Lemoine Gerade, welche antiparallel zu den Seiten ſind, ſo erhält man 6 Punkte auf den Seiten, die auf

Seite

einem Kreise liegen. Der Radius derselben ist $r \operatorname{tg} \omega$. (Der zweite Kreis von Lemoine.) 138

34. Die 6 Schnittpunkte des zweiten Lemoineschen Kreises mit den Seiten bilden, entsprechend gewählt, 2 Dreiecke, welche dem Grunddreieck ähnlich sind; die Seiten desselben sind zu denen des Grunddreiecks senkrecht 139

35. Die Stücke, welche der erste Lemoinesche Kreis von den Seiten abschneidet, verhalten sich wie die dritten Potenzen derselben 139

36. Legt man durch den ersten Brocardschen Punkt und je 2 Ecken des Grunddreiecks Kreise, so bestimmen die Mittelpunkte derselben ein Dreieck, das dem Grunddreieck ähnlich ist; in demselben ist ferner der erste Brocardsche Punkt derselbe wie beim Grunddreieck, während der zweite Brocardsche Punkt der Mittelpunkt des Umkreises vom Grunddreieck ist. Der entsprechende Satz gilt auch vom zweiten Brocardschen Punkt 140

37. Die in Nr. 36 bestimmten Dreiecke sind kongruent und die Seiten derselben sind senkrecht zu den entsprechenden Seiten der Dreiecke, die dem ersten Lemoineschen Kreise eingeschrieben sind 140

38. Die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten der dem ersten Lemoineschen Kreis eingeschriebenen Dreiecke $X_1Y_1Z_1$ und $X_2Y_2Z_2$ bestimmen ein neues Dreieck $A_7B_7C_7$, welches dem Grunddreieck ähnlich und ähnlich gelegen ist. Der Ähnlichkeitspunkt der Dreiecke ist der Winkelgegenpunkt J des Mittelpunktes E der Strecke zwischen den Brocardschen Punkten 141

39. Der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A_7B_7C_7$ (Nr. 38) ist der Mittelpunkt des Brocardschen Kreises 141

40. Die Seiten der dem ersten Lemoineschen Kreis eingeschriebenen Dreiecke schneiden sich noch in einem System von Punkten A_8, B_8, C_8, deren Verbindungslinien mit den entsprechenden Ecken des Grunddreiecks sich in dem Punkte T schneiden 141

41. Die Verbindungslinien A_7A_8, B_7B_8, C_7C_8 (Nr. 38 und 40) schneiden sich im Punkte L von Lemoine 142

42. Schneidet AT die Gerade X_1X_2 (Nr. 38) in X_5, BT die Gerade Y_1Y_2 in Y_5, CT die Gerade Z_1Z_2 in Z_5, und sind K_a, K_b, K_c die Fußpunkte vom Mittelpunkte K des Brocardschen Kreises auf die Seiten des Grunddreiecks, so schneiden sich X_5K_a, Y_5K_b, Z_5K_c im Punkte L von Lemoine 142

43. Die Spiegelpunkte der Schnittpunkte der Symmedianen mit dem Umkreise in Bezug auf die entsprechenden Seiten und die Fußpunkte der Lote vom Mittelpunkte des Umkreises auf die Symmedianen sind Winkelgegenpunkte 142

44. Die Schnittpunkte der Verbindungslinien der entsprechenden Ecken derjenigen Dreiecke, welche dem ersten Kreis von Lemoine eingeschrieben sind, bilden ein dem Grunddreieck kollineares Dreieck mit dem Punkte von Lemoine als Kollineationscentrum 142

45. Die Kollineationsachse des Grunddreiecks mit dem Dreieck Nr. 44 ist die Polare des Punktes von Lemoine in Bezug auf den ersten Lemoineschen Kreis 143

Seite

46. Sind A″, B″, C″ die Winkelgegenpunkte der Ecken A′, B′, C′ des Brocardschen Dreiecks, so ist A′B″C″ kollinear zum Grunddreieck und zum ersten Brocardschen Dreieck 143

47. Das Kollineationscentrum der Dreiecke A″B″C″ und A′B′C′ ist der Schnittpunkt der Eulerschen Geraden mit der Geraden ST 144

48. Zeichnet man über den Seiten eines Dreiecks ähnliche gleichschenklige Dreiecke, so sind die Spitzen die Ecken eines Dreiecks, das mit dem Grunddreieck denselben Schwerpunkt hat 144

49. Der Inhalt des Dreiecks, dessen Ecken die Spitzen gleichschenkliger Dreiecke über den Seiten mit dem Basiswinkel φ sind, ist durch den Ausdruck gegeben:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta\,(2\sin\omega - \sin(2\varphi + \omega))}{4\cos^2\varphi\sin\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 145$$

50—51. Konstruiert man über den Seiten eines Dreiecks gleichschenklige Dreiecke innerhalb, deren Basiswinkel φ die Bedingungsgleichung $\sin(2\varphi + \omega) = 2\sin\omega$ erfüllt, so liegen die Spitzen in einer Geraden. Solcher Geraden giebt es 2, die sich im Schwerpunkt rechtwinklig schneiden 146

52. Ein Dreieck, dessen Seiten den Schwerlinien eines Grunddreicks proportional sind, hat mit diesem denselben Brocardschen Winkel, und die Summe der Kotangenten der entsprechenden Winkel ist immer zwei Drittel der Kotangente des Brocardschen Winkels. Solche Dreiecke heißen symbrocardal 147

53. Teilt man die Seiten eines Dreiecks fortlaufend nach demselben Verhältnis und verbindet die erhaltenen Teilpunkte A_1, B_1, C_1 mit den Gegenecken der Seiten, auf denen sie liegen, so entsteht durch diese Linien ein zum Grunddreieck symbrocardales Dreieck. Ebenso ist das durch die Verbindungslinien der Teilpunkte und auch das durch die Ecktransversalen als Seiten bestimmte Dreieck dem Grunddreieck symbrocardal 148

54. Alle Dreiecke $A_n B_n C_n$, welche in A B C eingeschrieben und einem Dreieck $A_1 B_1 C_1$ ähnlich sind, haben einen gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt (Drehpunkt), aus dem sich die Lage der Ecken aller Dreiecke $A_n B_n C_n$ bestimmen läßt 151

55. Die Dreiecke, dessen Ecken die Fußpunkte der Lote eines Punktes des Brocardschen Kreises auf die Seiten des Grunddreiecks sind, haben mit demselben den Brocardschen Winkel gemein 151

56. Hat man 2 Ebenen E und F, welche einen willkürlichen Winkel einschließen, und projiziert 2 beliebig gelegene gleichseitige Dreiecke in der einen Ebene auf die andere orthogonal, so sind die Projektionsdreiecke einander symbrocardal 152

57. Wenn man über einer gegebenen Basis BC eine Reihe von symbrocardalen Dreiecken konstruiert, so liegt die Spitze A derselben auf einem Kreise, der die um B und C mit BC geschlagenen Kreise rechtwinklig schneidet, und wobei die Verbindungslinien des Mittelpunktes des Kreises mit den Ecken der Basis den doppelten Brocardschen Winkel bilden. (Neubergscher Kreis.) 153

58. Folgerungen besonders auf Dreiecke, deren Schwerliniendreieck dem Grunddreieck ähnlich ist 155

Seite

Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks ABC gleichwendig ähnliche Dreiecke J_aBC, J_bCA, J_cAB, so schneiden sich die Ecktransversalen AJ_a, BJ_b, CJ_c in einem Punkte,
1. wenn die Dreiecke gleichschenklig sind;
2. wenn die angegebenen Dreiecke J_aBC u. s. w. mit dem Grunddreieck symbrocardal sind 155

Sätze der Brocardschen Geometrie, die sich vorzugsweise auf bestimmte Kegelschnitte beziehen 157

Erklärende Begriffe. Isogonale Verwandtschaft 157
Bestimmung der Art des Kegelschnitts, der einer Geraden durch isogonale Verwandtschaft entspricht 158

A. Die Parabeln von Artzt und Kiepert 159

2. Ähnliche Punktreihen auf den Seiten des Grunddreiecks bestimmen die Parabeln (bc), (ca), (ab) von Artzt 159
3. Der Brennpunkt der Parabel (bc) ist der Fußpunkt des Lotes vom Mittelpunkt des Umkreises auf die von A ausgehende Symmediane 159
4. Folgerungen 160
5. Der Halbparameter der Parabel (bc) ist ausgedrückt durch $p_a = \frac{\Delta^2}{a_0{}^3}$. 161
6. Ähnliche Punktreihen auf den Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks bestimmen das zweite System der Parabeln (yz), (zx), (xy) von Artzt 161
67. Die Höhe AH ist die Polare des Mittelpunkts M in Bezug auf die Parabel (yz) 162
68. Die von der Ecke A ausgehende Schwerlinie ist die Leitlinie der Parabel (yz) 162
69. Der Brennpunkt der Parabel (yz) ist der Brennpunkt A″ der Parabel (bc) 162
70. Der Halbparameter der Parabel (yz) ist dargestellt durch:
$$p_a = \frac{\Delta\,(b^2 - c^2)}{4\,a_0{}^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 163$$
71. Die Kreise, welche durch den Mittelpunkt M des Umkreises und je 2 entsprechende Punkte Y, Z der ähnlichen Punktreihen y, z gehen, bilden ein Büschel. Bestimmt man dazu die Kreise durch M und je 2 entsprechende Punkte Z, X und X, Y der andern Punktreihen, so erhält man 3 Büschel, welche den Brocardschen Kreis gemeinsam haben 164
72. Die Winkel, welche die Seiten des ersten Brocardschen Dreiecks A′B′C′ mit den entsprechenden von ABC bilden, sind den Winkeln gleich, welche der Brocardsche Durchmesser mit den Radien des Umkreises nach den Ecken bildet 164
73. Die Kollineationsachsen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ des Dreiecks ABC mit den Dreiecken XYZ berühren eine Parabel, die Kiepertsche Parabel 165
74. Die Kiepertsche Parabel, deren Tangenten auf den Seiten die Punktreihen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ bestimmen, ist dem Grunddreieck eingeschrieben . 165
75. Die Leitlinie der Kiepertschen Parabel ist die Eulersche Gerade . . 166

Seite

76. Das Ähnlichkeitsverhältnis der Punktreihen A, B, C auf den Seiten ist dargestellt durch: $\frac{1}{\sin(\beta-\gamma)} : \frac{1}{\sin(\gamma-\alpha)} : \frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}$ 166

77. Fällt man von den Ecken eines Dreiecks die Lote auf die Eulersche Gerade und bestimmt die Schnittpunkte dieser Lote mit dem Umkreise, so erhält man ein Dreieck, das zu dem ersten folgende Beziehungen hat:
   1. es ist demselben kongruent;
   2. es liegt kollinear zu demselben;
   3. die Parallelen durch die Ecken dieses Dreiecks zu den entsprechenden Seiten des Grunddreiecks schneiden sich im Brennpunkt der durch das Dreieck bestimmten Kiepertschen Parabel 167

78. Die Winkel über den Bogen, welche durch die Abstände des Brennpunktes der Kiepertschen Parabel von den Ecken des Grunddreiecks bestimmt werden, sind gleich den Winkeln, welche die Eulersche Gerade mit den betreffenden Höhen des Dreiecks bildet 167

79. Die Abstände des Brennpunkts der Kiepertschen Parabel von den Ecken des Grunddreiecks verhalten sich wie die Sinus der Differenz der Winkel an den andern Ecken 168

80. Die Entfernungen der Ecken des Grunddreiecks von den Spiegelpunkten in Bezug auf die Eulersche Gerade sind durch die Ausdrücke gegeben:
$$AU = \frac{4r\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\sqrt{1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}} \text{ u. s. w.} \quad \ldots\ldots 168$$

81. Der Abstand des Brennpunktes F der Kiepertschen Parabel vom Höhenschnitt H ist durch die Formel gegeben:
$$FH^2 = \frac{4r^2}{1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}(8\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma + \cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma) \quad 169$$

82. Der Abstand des Brennpunktes F von der Eulerschen Geraden, also der Halbparameter der Kiepertschen Parabel ist durch die Formel gegeben:
$$FF_0 = \pm\frac{4r\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)}{\sqrt{1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}^3} = \frac{AF\cdot BF\cdot CF}{2r^2} \quad 170$$

B. Die Hyperbel Γ von Kiepert 173

83. Die Entstehung der Hyperbel Γ durch isogonale Verwandtschaft . . 173

84. Zweite Entstehung der Hyperbel Γ und die Abstandsverhältnisse der Punkte dieser Hyperbel von den Seiten 173

85. Der Mittelpunkt von Γ ist der Mittelpunkt W der Strecke zwischen dem Höhenschnittpunkt und dem Punkte von Tarry 175

86. Die Simsonschen Geraden der Endpunkte eines Durchmessers sind die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel, welche durch die Ecken des Dreiecks geht 175

87. Die Geraden, auf denen die Spitzen ähnlicher gleichschenkliger Dreiecke über den Spitzen liegen, sind gemeinsame Tangenten der zweiten Gruppe der Parabeln von Artzt. Dieselben sind zugleich die Halbierungslinien der Winkel, welche durch die Verbindungslinien des Schwerpunkts mit einer Ecke des Grunddreiecks und mit der entsprechenden des ersten Brocardschen Dreiecks gebildet werden . . . 176

Seite

88. Die Asymptoten der Hyperbel Γ sind den gemeinsamen Tangenten der zweiten Gruppe der Parabeln von Artzt parallel 177
89. Die Verbindungslinien des Punktes von Tarry mit den Schnittpunkten des Brocardschen Durchmessers mit dem Umkreise sind den Asymptoten der Hyperbel Γ parallel 177
90. Die Winkel, welche die Seiten des Brocardschen Dreiecks mit den entsprechenden des Grunddreiecks bilden, sind durch die Formeln gegeben:
$$\sin\varphi_\alpha = \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\omega}{\sqrt{1-4\sin^2\omega}} = \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}:\frac{\sin(\mu-\nu)}{\sin\omega}, \text{ u.s.w.}$$ 178
91. Die isogonale Kurve der Geraden von Lemoine ist die Ellipse, welche durch die Ecken des Dreiecks geht und den Schwerpunkt des Dreiecks zum Mittelpunkt hat. Ellipse von Steiner 179
92. Der gemeinschaftliche Punkt R zwischen der Ellipse von Steiner (91) und dem Umkreise ist der zweite Endpunkt des Durchmessers vom Umkreise, dessen einer der Punkt von Tarry ist. Punkt von Steiner . 179
93. Die Achsen der Ellipse von Steiner der Lage nach sind die gemeinschaftlichen Tangenten der zweiten Gruppe der Parabeln von Artzt . 180
94. Die Punkte der Hyperbel Γ, bei denen die Abstandsverhältnisse von den Seiten $\frac{1}{\sin(\alpha+\varphi)}:\frac{1}{\sin(\beta+\varphi)}:\frac{1}{\sin(\gamma+\varphi)}$ sich durch das Zeichen von φ unterscheiden, liegen zum Höhenschnittpunkt und Schwerpunkt harmonisch, z. B. S und J; N und Q. (Winkelgegenpunkt von K.) 180
95. Ist F der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises, so liegen N, J, F in einer Geraden 181
96. Es ist GQ ∥ SH 181
97. Es liegen G, K, N in einer Geraden 181
98. Es sind LG und LH Tangenten der Hyperbel Γ 181
99—102. Es liegen in einer Geraden
a) H, J, K; b) Q, F, S; c) M, J, Q; d) G, J, T 182
103. Es schneiden sich MH, ST, EJ in einem Punkte P 182
104. Die Punkte E, J, P, R (92) liegen harmonisch auf einer Geraden . 182
105. R, G, W (85) liegen in einer Geraden 183
106. Trifft der parallel dem Brocardschen Durchmesser gelegte Durchmesser des Feuerbachschen Kreises diesen Kreis in Q′ und Q″, so sind WQ′ und WQ″ die Asymptoten der Hyperbel Γ 183
107. Legt man durch den Mittelpunkt des Umkreises eine Sekante, welche die Hyperbel Γ in den Punkten D und Δ schneidet, so werden die Verbindungslinien der Ecken des Grunddreiecks mit den Hyperbelpunkten D und Δ auf den Mittelsenkrechten Punkte bestimmen, welche die Spitzen gleichschenkliger ähnlicher Dreiecke sind. Diese Spitzen geben dann 2 Dreiecke, die mit dem Grunddreieck kollinear, auch untereinander kollinear sind, und zwar geben je 2 Dreiecke dieselbe Kollineationsachse 183
108. Wenn man über den Seiten eines Dreiecks 2 Systeme gleichschenkliger ähnlicher Dreiecke konstruiert, so daß die entsprechenden Winkel an der Grundlinie in den Systemen sich zu 90° ergänzen, so schneiden

Seite

sich die Verbindungslinien der Ecken des Grunddreiecks mit den entsprechenden Spitzen der beiden Systeme in 2 Punkten der Hyperbel Γ, die mit dem Mittelpunkt des Umkreises in einer Geraden liegen. Kiepertsche Dreiecke 184

109. Zeichnet man über den Seiten eines Dreiecks ABC 2 Systeme gleichschenkliger ähnlicher Dreiecke, von denen das eine System mit dem Grunddreieck in demselben Flächenteil, das andere im entgegengesetzten Flächenteil liegt, und verbindet die Ecken des Grunddreiecks mit den entsprechenden Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke beider Systeme, so schneiden sich diese Verbindungslinien in 2 Punkten der Hyperbel Γ, welche mit dem Punkte von Lemoine in einer Geraden liegen . 185

110. Die Mittelpunkte des Umkreises und des Feuerbachschen Kreises bilden mit dem Punkte von Lemoine ein harmonisches Tripel in Bezug auf die Hyperbel Γ 185

111. Zeichnet man über den Seiten eines Dreiecks ABC 2 solche Systeme gleichschenkliger ähnlicher Dreiecke, daß 2 anstoßende Seiten dieser Dreiecke über derselben Seite des Grunddreiecks senkrecht zu einander sind, so schneiden sich die Verbindungslinien der Ecken des Grunddreiecks mit den entsprechenden Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke beider Systeme in 2 Punkten der Hyperbel Γ, die mit dem Mittelpunkte des Feuerbachschen Kreises in einer Geraden liegen 186

112. Der Mittelpunkt des Brocardschen Kreises, der Pol der Brocardschen Linie in Bezug auf den Brocardschen Kreis und der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises bilden ein harmonisches Tripel in Bezug auf die Hyperbel Γ 186

113. Die Polare vom Mittelpunkt der Distanz der Brocardschen Punkte in Bezug auf die Hyperbel Γ ist die Parallele zum Brocardschen Durchmesser durch den Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises 186

114. Der Pol der Verbindungslinie SF in Bezug auf die Hyperbel Γ ist der Spiegelpunkt des Punktes von Lemoine in Bezug auf die Verbindungslinien der Brocardschen Punkte 187

115. Wenn man 2 Systeme gleichschenkliger ähnlicher Dreiecke über den Seiten eines Grunddreiecks wie in Nr. 108 konstruiert, so bestimmen die Spitzen 2 Dreiecke, welche die Eigenschaft haben, daß die Verbindungslinie einer Ecke des Grunddreiecks mit der entsprechenden Ecke des einen Kiepertschen Dreiecks senkrecht zu der Seite des zweiten Kiepertschen Dreiecks ist, die der entsprechenden Ecke dieses Dreiecks gegenüberliegt 187

116. Bestimmt man 2 Kiepertsche Dreiecke wie in Nr. 115 angegeben ist, so steht die Verbindungslinie der Kollineationscentra der Dreiecke senkrecht zur gemeinsamen Kollineationsachse dieser Dreiecke mit dem Grunddreieck 188

117. Folgerungen für die speziellen Fälle $\varphi = 60^0$, $\varphi = 45^0$ 188

118. Die Differenz der Kiepertschen gleichseitigen Dreiecke ist gleich dem Grunddreieck 190

119. Die Brocardschen Punkte sind die Brennpunkte einer Ellipse, welche die Seiten des Dreiecks in den Fußpunkten der Symmedianen berührt. Brocardsche Ellipse 190

Erster Teil.

Angabe allgemeiner Ziele und Regeln, die verschiedenen Methoden und Hilfsmittel bei den Beweisen.

A. Einleitende Bemerkungen und die Grundsätze.

1. Man kann 2 Hauptarten geometrischer Sätze unterscheiden, welche jedoch in enger Verbindung stehen. Es handelt sich entweder um die Größe oder um die Lage geometrischer Gebilde.

2. Die Fundamentalgrößen der ebenen Geometrie sind die Strecke (Länge) und der Winkel. Dieselben bestimmen alle übrigen Größen, nämlich Flächen, Produkte von Strecken, Verhältnisse solcher Größen, die trigonometrischen Funktionen der Winkel, Doppelverhältnisse, Tripelverhältnisse, beliebige algebraische Verbindungen der angegebenen Größen. Man könnte die Zahl als dritte Fundamentalgröße denken, doch kann sie geometrisch leicht als Verhältnis gleichartiger Größen aufgefaßt werden.

Bem. Auch in der Stereometrie können alle Größen in etwas erweiterter Auffassung auf die genannten Fundamentalgrößen zurückgeführt werden.

3. Die Fundamentalgebilde der Lage in der Ebene sind der Punkt und die Gerade. Zu den einfachen Grundgebilden gehört in der elementaren Geometrie noch der Kreis. Einige einfache Eigenschaften der Kegelschnitte lassen sich ebenfalls durch elementare Hilfsmittel herleiten. Das Fundament dazu liefern die vorher genannten Gebilde.

4. Die Aussagen in der Geometrie sind sehr verschiedener Art, schon bedingt durch die Verschiedenheit der Gebilde. Die ersten Aussagen geben nur Erklärungen der Gebilde. Andere Aussagen, die man als solche über die Abhängigkeit der Gebilde zusammenfassen kann, geben Eigenschaften der Gebilde und werden als Lehrsätze bezeichnet. Dieselben bedürfen eines Beweises, wenn sie als richtig gelten sollen. Beweisen heißt: die Richtigkeit von Behauptungen durch Angabe von frühern

Sätzen feststellen. Diejenigen Aussagen, deren Richtigkeit an sich ersichtlich ist, die somit den Anfang des Denkens angeben, werden als Grundsätze bezeichnet. Alle übrigen Sätze (Lehrsätze) müssen auf diese zurückgeführt werden. Unter den Sätzen hebt man noch die Principien hervor; dies sind Sätze von einfacher Form, aber möglichst umfassend, auf welche in vielen Fällen zurückgegangen wird. Sie unterscheiden sich von den Grundsätzen dadurch, daß sie noch eines Beweises bedürfen.

Andere wichtige Sätze heißen Fundamentalsätze.

5. Der Satz enthält Bedingungen und Behauptungen. Zuweilen, und zwar wird dies bei den grundlegenden Sätzen der Fall sein, wird nur eine Bedingung vorkommen, ebenso wird häufig nur eine Behauptung aufgestellt; in den meisten Fällen wird die Anzahl der Bedingungen eine größere sein; doch wird in den Fundamentalsätzen entweder nur eine Behauptung aufgestellt, oder die Behauptungen gruppieren sich um eine wichtigste als Unterabteilungen, so daß sie in der wichtigsten gleichsam enthalten sind.

6. Ein Satz wird umgekehrt, wenn die Behauptung zu einer Bedingung und eine der Bedingungen zur Behauptung wird, während die andern Bedingungen unverändert bleiben. Auf diese Weise giebt es für manche Sätze mehrere Umkehrungen. Solche Umkehrungen werden vorzugsweise bei Sätzen vorkommen, die nur eine Behauptung enthalten oder wenigstens eine solche, welche die andern in sich enthält. Zur Erläuterung sei die Umkehr an einem Satze gezeigt.

Satz. Die Verbindungslinie des Schnittpunktes von 2 Tangenten eines Kreises mit dem Mittelpunkte desselben halbiert den Winkel der Tangenten, innerhalb dessen die Kreisfläche liegt.

Umkehr des Satzes. Die Halbierungslinie des Winkels von 2 Tangenten, innerhalb dessen die Kreisfläche liegt, geht durch den Mittelpunkt derselben.

Im Satze waren die Bedingungen für eine Gerade, daß sie durch den Schnittpunkt von 2 Tangenten und durch den Mittelpunkt des Kreises geht, die Behauptung (auch Folgerung genannt), daß sie den einen Winkel der Tangenten halbiert. In dem umgekehrten Satze war die frühere Behauptung, daß sie den einen Winkel der Tangenten halbiert, zur Bedingung gemacht, die Bedinguug, daß sie durch den Schnittpunkt der Tangenten geht, liegt hier schon darin, ist also unverändert geblieben; dagegen ist die frühere Bedingung, daß sie durch den Mittelpunkt des Kreises geht, zur Behauptung geworden.

7. Da alle Lehrsätze als letzte Gründe für ihre Richtigkeit die Grundsätze haben, so müssen dieselben in allen Formen jedem klar sein, der imstande sein will, einen Beweis zu führen. Obwohl diese Grund-

sätze bekannt sind und auch wohl in allen Lehrbüchern angegeben werden, so dürfte es doch nicht überflüssig sein, sie auch hier anzuführen, besonders da eine Vervollständigung derselben stattfinden soll.

8. Grundsätze über die Größengebilde.

a) Jede Größe ist sich selbst gleich. $A = A$.

b) Das Ganze ist gleich der Summe seiner Teile und größer als jeder Teil. Der Begriff Teil ist hier in dem engern Sinne aufgefaßt, wonach es ein Glied einer Summe ist.

c) Wenn 2 Größen einer und derselben dritten Größe gleich sind, so sind sie unter sich gleich.

$$A = B,\ A = C,\ \text{also}\ B = C.$$

d) Gleiches um Gleiches vermehrt oder vermindert giebt Gleiches.
$A = B$, $C = D$ giebt $A + C = B + D$, auch $A - C = B - D$.

e) Vielfache von gleichen Größen sind gleich, ebenso bestimmte Teile z. B. die Hälften derselben.

$$A = B,\ \text{also}\ \frac{A}{2} = \frac{B}{2},\ \frac{A}{n} = \frac{B}{n}.$$

f) Größeres zu Gleichem oder Größerem addiert giebt Größeres.
$A > B$ giebt $A + C > B + C$, $A > B$ und $C > D$ giebt $A + C > B + D$.

g) Größeres von Gleichem oder Kleinerem subtrahiert giebt Kleineres.
$A > B$ giebt $C - A < C - B$, $A > B$ und $C < D$ giebt $C - A < D - B$.

h) Gleiches von Größerem subtrahiert giebt Größeres.

$$A > B \text{ giebt } A - C > B - C.$$

i) Ist von 2 Größen die erste größer als die zweite, die zweite gleich einer dritten oder größer als dieselbe, so ist die erste Größe größer als die dritte. Im zweiten Falle ist der Unterschied zwischen der ersten und dritten Größe größer als der Unterschied zwischen der ersten und zweiten oder zwischen der zweiten und dritten.

Ist $A > B$, $B = C$, so ist $A > C$;
ist $A > B$, $B > C$, so ist $A > C$, $A - C > B - C$.

k) Nebenbei sei auf 2 häufig wiederkehrende Schlüsse aufmerksam gemacht, die dem Anfänger häufig noch entgehen.
Ist $A = B + C$ und $B = C$, so ist $A = 2\,B = 2\,C$ und $B = C = \frac{1}{2}A$.
Ist $A = B + C$, $A = D + C$, so ist $B = D$.

Grundsätze über die Gebilde der Lage.

9. Wie über die Größen, so giebt es auch Grundsätze über die Gebilde der Lage. Man begnügt sich hier meistens mit dem Satze: Die Gerade ist durch 2 Punkte eindeutig bestimmt. Es ist indessen für die Anwendungen gut, diesen Grundsatz in ähnlicher Weise auszuführen, wie dies mit den Grundsätzen der Größe geschehen ist.

Wenn eine Gerade durch 2 Punkte bestimmt gedacht ist, so sollen diese Punkte in der Geraden liegen. Außer jenen Punkten haben wir in der Geraden noch unendlich viele. Heben wir einen hervor, so ergiebt sich:

a) Geht eine Gerade, welche durch die Punkte A und B bestimmt ist, noch durch den Punkt C, so geht auch die durch die Punkte A und C bestimmte Gerade durch B.

b) Auf 4 Punkte angewandt haben wir den Grundsatz:

Geht die durch A und B bestimmte Gerade durch C und D, so geht die durch C und D bestimmte Gerade durch A und B. In diesen Grundsätzen können statt der Punkte auch andere Bedingungen zur Bestimmung einer Geraden auftreten, falls die Eindeutigkeit der Geradenbestimmung dadurch nicht gestört wird, d. h. diejenige Bestimmung, die immer nur eine einzige Gerade liefert. Eine solche Bedingung ist die, einer Geraden parallel zu sein, welche nach neuerer Anschauung als die Bedingung aufgefaßt wird, durch einen Punkt in der Unendlichkeit zu gehen. Zu dieser Anschauung wird man durch die Erwägung veranlaßt, daß, wie es nur eine Gerade giebt, welche einen Punkt A mit einem Punkte B verbindet, ebenso auch durch einen Punkt A nur eine Gerade gezogen werden kann, welche einer bestimmten Geraden parallel ist. Wir erhalten daher folgenden Grundsatz:

c) Wenn die durch A und B bestimmte Gerade der Geraden l parallel ist, so muß auch die durch A zu l parallel gelegte Gerade durch B gehen. Ebenso umgekehrt:

d) Wenn die durch A zu l parallel gelegte Gerade durch B geht, so ist auch die durch A und B gelegte Gerade parallel zu l.

Es sei die Anwendung dieses Grundsatzes an einem Beispiele gezeigt.

Satz. Zieht man durch den Mittelpunkt einer Seite eines Dreiecks die Parallele zu einer zweiten Seite, so wird die dritte Seite durch die Parallele halbiert.

Mittelst des genannten Grundsatzes folgt sofort:

Die Verbindungslinie der Mittelpunkte von 2 Seiten ist der dritten Seite parallel.

Zur Umkehr des Satzes ist also ein sogenannter indirekter Beweis nicht nötig.

e) Statt eines Punktes kann auch die Bedingung zur Bestimmung einer Geraden eintreten, zu einer Geraden senkrecht zu sein, da man von einem Punkte nur ein Lot auf eine Gerade fällen kann. Dies giebt noch folgenden Grundsatz:

Wenn die durch A und B bestimmte Gerade zu l senkrecht ist, so geht die Gerade, welche durch A geht und senkrecht zu l ist, durch B. Ebenso umgekehrt:

f) Wenn die durch A senkrecht zu l gezogene Gerade durch B geht, so steht die Gerade AB senkrecht zu l.

10. Die Bedingung für eine Gerade, einer gegebenen Geraden parallel zu sein, kann in der Form gestellt sein, daß sie mit einer gegebenen Geraden einen bestimmten Winkel bildet. Soll diese Bedingung nicht zweideutig sein, so muß für die gegebene Gerade festgesetzt sein, welches die Grundrichtung derselben sein soll, die man auch als die positive bezeichnet, ebenso, in welcher Art die Drehung sein soll, welche einen positiven Winkel erzeugt. Bei diesen Festsetzungen ist dann die Richtung der Geraden eindeutig bestimmt.

11. Eine Bedingung für eine Gerade ist ferner, mit 2 gegebenen Geraden gleiche Winkel zu bilden. Wegen der doppelten Richtung einer Geraden ist diese Bedingung zweideutig. Man kann jedoch auch hier eine eindeutige Bestimmung erhalten, wenn man die positiven Richtungen der Geraden feststellt. Sind a und b 2 (unbegrenzte) Gerade, so werden wir den Winkel derselben durch (a, b) bezeichnen. Bildet a mit der positiven Richtung von b den Winkel (a, b), dann mit der entgegengesetzten Richtung den Winkel (a, b) + 180°, während die entgegengesetzte Richtung von b mit a den Winkel 180° — (a, b) bildet. Man sieht dann auch ein, daß (a, b) und (b, a) Winkel mit entgegengesetzten Zeichen sind oder auch, daß (a, b) + (b, a) = 360° ist.

Ist nun w eine Gerade, welche mit a und b gleiche Winkel bildet, so wird dies ausgedrückt durch (a, w) = (w, b). Es giebt aber noch eine zweite Gerade w', für welche die Bedingung stattfindet: (a, w') = 180° + (w', b) = (w', b'), wo b' die entgegengesetzte Richtung von b ist.

12. Geht eine Gerade, welche die Bedingung erfüllt, daß sie mit 2 Geraden a und b gleiche Winkel bildet, durch den Schnittpunkt derselben, so heißt sie die Halbierungslinie des Winkels derselben. Wie aus Nr. 11 hervorgeht, giebt es 2 solche Geraden; für die eine ist

$$(a, w) = (w, b),$$

für die andere $(a, w') = (w', b) + 180° = 180° - (b, w')$ (Fig. 1), oder auch $(a, w') = (w', b')$.

Man wird in den meisten Fällen diese Halbierungslinien als innere und äußere unterscheiden können. Obwohl also die Aussage oder Bedingung für eine Gerade, die Halbierungslinie des Winkels von 2 Geraden zu sein, zweideutig ist, so erhält man doch eindeutige Bestimmungen durch die Festsetzung der positiven Richtungen der Schenkel. Dadurch kann man manche Umkehrungen von Sätzen erhalten, ohne daß

man noch zu einem besondern Beweise greifen müßte. Wir wollen dies an einem Beispiele erläutern.

Satz. Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze in einem gleichschenkligen Dreiecke halbiert die Grundlinie und steht auf derselben senkrecht.

1. Umkehr. Das im Mittelpunkte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks errichtete Lot geht durch die Spitze und halbiert den Winkel an der Spitze.

2. Umkehr. Die Gerade durch die Mitte, welche gleiche Winkel mit den gleichen Seiten bildet, geht durch die Spitze und steht zur Grundlinie senkrecht.

In dem Satze ist die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze eindeutig bestimmt, da man diejenige darunter versteht, welche innerhalb des Dreiecks liegt.

Was die 2te Umkehr betrifft, so bildet zwar auch die Grundlinie selbst gleiche Winkel mit den Schenkeln des Winkels an der Spitze; nehmen wir aber die Richtungen der Schenkel als positiv, welche von der Spitze nach den Endpunkten der Grundlinie gehen, so würden diese Winkel in dem vorher bezeichneten Sinne nicht gleich sein, sondern sich durch das Zeichen unterscheiden.

13. Den Grundsätzen über Gerade entsprechen Grundsätze über Punkte, die trotz ihrer Einfachheit hier Erwähnung finden mögen.

a) Der Punkt ist eindeutig durch 2 Gerade als deren Schnittpunkt bestimmt.

Mehrere durch einen Punkt gehende Gerade bezeichnet man als Strahlen. Wie nun eine Gerade als Inbegriff aller Punkte erscheint, die auf ihr liegen, so der Punkt als Inbegriff aller Strahlen, welche durch ihn gehen. Die Ausführung des in a) angegebenen Grundsatzes giebt noch:

b) Liegt der durch die Geraden a und b bestimmte Punkt auf der Geraden c, so liegt der durch die Geraden a und c bestimmte Punkt auf b.

c) Liegt der durch die Geraden a und b bestimmte Punkt auf den Geraden c und d, so liegt der durch die Geraden c und d bestimmte Punkt auf a und b, oder der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der Schnittpunkt von allen 4 Geraden.

14. Ein Punkt ist im allgemeinen ein ursprünglich gegebener oder ein Schnittpunkt von 2 Linien, die gerade und krumm sein können. Eindeutig bestimmte Punkte sind nur die Schnittpunkte von 2 Geraden. Soll ein Punkt auf einer Geraden liegen, so ist er noch nicht bestimmt, er ist aber nicht mehr ganz willkürlich, insofern er eine Bedingung

erfüllen muß; zur Bestimmung eines Punktes der Geraden ist dann noch eine Bedingung erforderlich. Außer der vorher angegebenen Bedingung giebt es noch andere, deren Zurückführung auf die angegebene nicht sofort erkannt wird. So ist der Mittelpunkt einer Strecke, deren Endpunkte bestimmt sind, ein bestimmter Punkt und zwar ein häufig in Sätzen vorkommender. Noch allgemeiner ist ein Punkt auf einer Geraden durch seine Entfernung von einem bestimmten Punkte derselben oder durch das Verhältnis der Entfernungen von 2 bestimmten Punkten der Geraden bestimmt. Es giebt freilich 2 Punkte, deren Entfernungen dasselbe Verhältnis haben; man kann dieselben aber sehr leicht unterscheiden, da der eine innerhalb der Strecke liegt, welche die ersten Punkte bestimmen, der andere außerhalb. Nebenbei sei bemerkt, daß man diese beiden Punkte als konjugiert harmonische in Bezug auf die ersten bezeichnet.

15. Eine Bedingung für einen Punkt wird oft in einer Gestalt angegeben, aus der durch einen Satz die Bedingung abgeleitet wird, auf einer Linie zu liegen. Ein großer Teil der geometrischen Untersuchungen bezieht sich darauf, diese Zurückführung zu bestimmen. Ein einfaches Beispiel lege dies klar. Eine Bedingung für einen Punkt ist, von 2 Punkten gleich weit entfernt zu sein. Es läßt sich nun nachweisen, daß diese Bedingung darauf zurückkommt, daß er in dem Lote liegt, welches im Mittelpunkt der Verbindungslinie zu derselben errichtet werden kann.

16. Es ist vorher von Punkten in der Unendlichkeit gesprochen. Solche sind natürlich nur ideell aufzufassen; man muß einen Punkt in der Unendlichkeit als eine Richtung ansehen. Die Einführung hat indessen den Vorteil, daß gewisse Beziehungen der Gebilde unter einem allgemeinern Gesichtspunkte erscheinen.

17. Dadurch, daß der Kreis in die elementare Geometrie eingeführt ist, erhält man zweideutige Bedingungen für Punkt und Gerade. Soll eine Gerade durch einen Punkt gehen und einen Kreis berühren, so wird dieselbe im allgemeinen zweideutig bestimmt. Dasselbe findet mit einem Punkte statt, der durch Gerade und Kreis bestimmt wird. Sätze, welche sich an Punkte und Gerade knüpfen, die auf diese Weise bestimmt sind, lassen sich nicht ohne weiteres umkehren. Bei den Beweisen wird man gut thun, Punkte und Gerade, welche man als Hilfsgebilde einführt, möglichst eindeutig zu bestimmen.

B. Die Gegenstände und Hauptziele bei den Sätzen; die verschiedenen Methoden bei den Beweisen.

18. Die Fundamentalgebilde der ebenen Geometrie sind, wie schon bemerkt, Strecke und Winkel als Größengebilde, Punkt und Gerade als Lagengebilde. Die Lagengebilde können natürlich nur dadurch bestimmt werden, daß man sie auf andere Lagengebilde bezieht, die nähere Bestimmung geschieht dann großenteils durch Größengebilde. Die Untersuchungen über diese verschiedenen Gebilde werden daher in Verbindung stehen. Denkt man sich einige Gebilde gegeben, so werden andere von diesen abhängig sein; doch tritt eine Abhängigkeit erst ein, wenn mindestens 2 Gebilde gegeben sind.

19. Sind 2 Strecken gegeben, so erhalten wir in der Summe und Differenz 2 andere Strecken, die von jenen abhängig sind. Wie sich ferner zeigt, kann man unter dem Produkt von 2 Strecken ein neues geometrisches Gebilde verstehen, nämlich das Rechteck, welches diese Strecken zu Seiten hat. Der Quotient oder das Verhältnis von Strecken führt zu einem Zahlenbegriff, der von jenen abhängig ist. Sind mehrere Strecken gegeben, so wird man hier schließlich immer auf eine Verbindung von je 2 zurückgehen. Eine beliebige algebraische Verbindung von Strecken wird wesentlich auf eine Strecke, eine Fläche, ein Verhältnis zurückkommen.

20. Sind 2 Winkel gegeben, so giebt nur die Summe und Differenz eine einfache und wichtige abhängige Größe. Das Produkt von Winkeln hat keine einfache geometrische Bedeutung. Das Verhältnis von Winkeln kommt nur vor, wenn es sehr einfach ist. Eine erweiterte Anwendung erhält man erst durch die Einführung der trigonometrischen Funktionen. Mehr als 2 Winkel geben kein besonderes Gebilde.

Diese genannten Gebilde der Größe treten in der Geometrie nicht für sich allein auf, sondern in Verbindung mit den Gebilden der Lage, da eine rein algebraische Verbindung von Strecken und Winkeln mehr der Algebra angehört; denn auch die Trigonometrie beschäftigt sich schließlich nicht nur mit reinen Größenbestimmungen.

21. Durch 2 Punkte wird die Strecke bestimmt, welche man als den Abstand derselben bezeichnet. Außerdem ist die Gerade, welche die beiden Punkte enthält, von den Punkten abhängig. Auch könnte der Mittelpunkt der Strecke in gewisser Hinsicht von den Punkten als abhängig gedacht werden.

22. Sind 2 Gerade gegeben, so werden durch sie 2 Winkel bestimmt, die in einem bestimmten Zusammenhange stehen. Da sie zu-

sammen 2 Rechte betragen, so bestimmt der eine den andern. Ebenso ist der Schnittpunkt der Geraden und die Halbierungslinie der Winkel von denselben abhängig.

23. Durch Punkt und Gerade wird direkt nur die Ebene bestimmt, welche beide Gebilde enthält. Indessen können wir indirekt noch verschiedene Gebilde mit denselben in Beziehung setzen, die wir also von denselben abhängig denken. Zeichnet man das Lot durch den Punkt zur Geraden, so wird auf demselben durch Punkt und Gerade eine Strecke abgeschnitten, welche kürzer ist, als die Verbindungsstrecken des Punktes mit allen übrigen Punkten der Geraden. Diese Strecke wird daher mit Recht als der Abstand der beiden Gebilde bezeichnet. Es ist auch das Lot als unbegrenzte Gerade betrachtet ein Gebilde, welches in gewisser Hinsicht von den beiden abhängig. Auch noch auf andere Weise können wir Gebilde uns von diesen Elementen abhängig denken.

24. Zu den Elementargebilden gehört auch der Kreis, der aber nicht als Grundgebilde anzusehen ist, denn er ist ein Gebilde der Größe, während doch zugleich auch eine Lage ihm angehört. Mittelst der Grundgebilde erhalten wir eine doppelte Auffassung von ihm. Ein Kreis entsteht, wenn man einen Punkt der Ebene festhält und einen andern in der Ebene so bewegt, daß er vom andern stets dieselbe Entfernung behält. Bewegen wir aber eine Gerade in der Ebene so, daß sie stets dieselbe Entfernung von der Geraden behält, so erzeugt die Gerade ebenfalls einen Kreis. Derselbe erscheint dann gleichsam als Inbegriff aller Tangenten.

25. Die Untersuchungen in der Geometrie gehen zwar im Anfange auf die Erforschung dieser einfachen Abhängigkeit; doch führt dies nicht zu eigentlichen Lehrsätzen. Solche treten im wesentlichen erst auf, wenn man zeigen kann, daß gewisse Gebilde auf verschiedene Weise durch andere bestimmt werden. Kann man z. B. zeigen, daß ein Punkt x nicht nur durch die Geraden a und b, sondern auch durch die Geraden c und d bestimmt werden kann, so ist dadurch ein Satz gewonnen.

26. Indem man von 3 Grundgebilden, in erster Linie von Punkten oder Geraden ausgeht, eröffnet sich schon ein weites Feld für geometrische Untersuchungen. Zunächst sei bemerkt, daß im allgemeinen 3 Punkte 3 Verbindungslinien, und 3 Gerade 3 Schnittpunkte bestimmen, so daß die Gebilde, welche durch 3 Punkte und 3 Gerade entstehen, äußerlich dieselben sind; man bezeichnet daher diese Gebilde mit dem gemeinsamen Namen Dreieck, ob man von 3 Punkten oder 3 Geraden ausgeht. Die neuere Auffassung unterscheidet diese Gebilde als Dreieck und Dreiseit. Für unsere Zwecke ist dieser Unterschied nicht wesentlich.

Indem man zu den Grundelementen die Mitten der Seiten, die Halbierungslinien der Winkel des Dreiecks und der Nebenwinkel, die

Lote durch die Ecken zu den Gegenseiten, Kreise, welche durch gewisse Schnittpunkte gehen bez. die Geraden als Tangenten enthalten, hinzufügt, erhält man eine Menge Gebilde, welche in nähere Beziehung gesetzt werden können, die daher auch manche Lehrsätze liefern.

27. Noch mehr Aussichten eröffnen sich wohl, wenn die Anzahl der ursprünglich gegebenen Punkte und Geraden größer als 3 ist. Indessen sind doch nur Viereck und Vierseit hervorzuheben, da es darauf ankommt, einfache Beziehungen zu suchen. Das Viereck und Vierseit bieten noch dadurch merkwürdige Eigenschaften, daß man an die gegenseitige Lage der Ecken und Seiten noch eine Bedingung knüpfen kann, z. B., daß die Ecken auf einem Kreise liegen, daß ebenso die Seiten einen Kreis berühren, daß einige der Seiten zu einander parallel sind ꝛc.

28. Nicht unwichtig sind auch 4 Punkte, die auf einer Geraden liegen, sowie 4 Strahlen durch einen Punkt. Es zeigt sich hier, daß die gegenseitigen Beziehungen solcher Gebilde von großer Bedeutung sind.

29. Der Kreis für sich allein, dann auch in Verbindung mit Punkten und Geraden, endlich in Verbindung mit andern Kreisen giebt noch ein ausgedehntes Feld zu Untersuchungen. Es kann dies erst erörtert werden, wenn auf die Eigenschaften näher eingegangen wird.

30. Vor der Angabe besonderer Ziele in den Sätzen wird es gut sein, eine Übersicht der einfachsten Ziele im allgemeinen zu geben, wobei zunächst die Größengebilde in Betracht kommen.

a) Die einfachste Aussage von Größen ist die, daß eine Größe einer andern (natürlich gleichartigen) gleich ist. Hier können wir noch 2 Arten unterscheiden. Man vergleicht entweder Gebilde von irgend einer Größe, die aber durch Bedingungen irgendwie bestimmt sind, miteinander oder man vergleicht eine durch irgend welche Bedingungen bestimmte Größe mit einer solchen, die von Hause aus (a priori) als bestimmt gedacht wird. Zur Erläuterung mögen Beispiele dienen.

Errichtet man im Mittelpunkt einer Strecke **AB** auf der Geraden dieser Strecke das Lot und ist **P** ein willkürlicher Punkt des Lotes, so läßt sich zeigen, daß $PA = PB$ ist. Die hier verglichenen Größen sind gleich, die Länge der Strecken **PA**, **PB** ist aber eine willkürliche durch nichts ausgezeichnete Größe.

Sind **A**, **B**, **C** die Winkel eines Dreiecks, so gilt der Satz, daß $A + B + C = 2R$ ist. Hier vergleichen wir eine durch gewisse Bedingungen bestimmte Summe mit einer Größe $2R$, die als eine ursprünglich gegebene gedacht wird.

b) Es giebt noch eine andere Art von Aussagen über Größen, deren Verständnis erst erschlossen wird, wenn das Gebiet der Untersuchungen

sich erweitert hat. Denkt man sich nämlich mehrere Größengebilde durch eine Anzahl von Bedingungen derartig bestimmt, daß für alle die meisten Bedingungen dieselben sind, eine aber verschieden, so daß für die letzte gleichsam ein Spielraum gelassen ist, dann wird für eines der so bestimmten Gebilde eine wichtige Aussage sein, daß es das kleinste oder größeste ist.

Ist z. B. ein Punkt und ein Winkel gegeben, der innerhalb des Winkelraumes liegen soll, so wird jede durch den Punkt gelegte Gerade mit den Schenkeln des Winkels ein Dreieck bilden. Alle diese Dreiecke haben der Lage nach 2 Seiten gemein, während die dritte Seite verschieden ist; diese dritten Seiten haben nur das Gemeinsame, durch denselben Punkt zu gehen, so daß hier ein Spielraum gelassen ist. Hier gilt nun der Satz: Von allen Dreiecken, die man erhält, wenn man durch einen Punkt innerhalb eines Winkelraumes eine Gerade legt, ist dasjenige das kleinste, bei welchem die Strecke der durch den Punkt gelegten Geraden innerhalb des Winkelraumes durch den Punkt halbiert wird.

Diese kleinsten und größten Gebilde heißen Minima und Maxima.

31. Die Aussagen über die Größe erscheinen nicht immer in der einfachen Form $A = B$, wo A und B Gebilde sind, die in der betreffenden Figur des Satzes wirklich dargestellt sind. Ein Gebilde läßt sich häufig durch andere nur ausdrücken. Man hat z. B. Aussagen von der Form $A = B + C$, $A = B - C$. Diese Form tritt bei allen Fundamentalgebilden, besonders aber bei Flächen auf. Die Aussagen nehmen noch verwickeltere Formen an, wenn trigonometrische Funktionen benutzt werden. Wesentlich verschieden sind diese Aussagen indessen von den vorher erwähnten (30a) nicht, da man sich ein solches Gebilde immer konstruiert denken kann, wenn die Konstruktion in der Grundfigur auch nicht ausgeführt ist. Sind z. B. a und b die Katheten, c die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so gilt der Satz $c^2 = a^2 + b^2$. Denkt man sich die Quadrate über den Seiten eines Dreiecks gezeichnet, so muß man sich in Gedanken noch erst eine Figur zeichnen, welche die Quadrate über a und b in sich enthält. Immerhin kann man sich diese Konstruktion leicht ausgeführt denken.

32. Wesentlich anders sind die Aussagen über Kongruenz und Ähnlichkeit der Figuren. In diesen liegt nämlich ein Zusammenfassen von Eigenschaften. Setzt man z. B. $ABC \cong A'B'C'$, so stecken darin die Aussagen $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ und noch andere, die bez. eine Folge der andern sind. Entsprechendes gilt über die Aussagen der Ähnlichkeit und endlich der Projektivität.

33. Zu den angegebenen Sätzen über Gleichheit kommen die der Ungleichheit von Größen $A > B$, $A < B$. Solche Aussagen geben oft ein Mittel, um Gleichungen festzustellen, besonders auch die Feststellung der Maxima und Minima.

In der Natur der Sache liegt es, daß man nicht Aussagen macht, welche zusammenfassende Ungleichheiten geben.

34. Die Aussagen über die Gebilde der Lage sind im wesentlichen von derselben Art als die Bedingungen, durch welche sie bestimmt werden. Von einer Geraden macht man also die Folgerung, daß sie durch gewisse Punkte gehe, daß sie zu bestimmten Geraden parallel sei oder senkrecht stehe oder daß sie einen Kreis berühre. Vom Punkte macht man die Folgerung, daß er auf einer bestimmten Geraden oder andern Linie liege. Häufig erscheint die Aussage in einer Form, aus der vermittelst eines Satzes die Folgerung gemacht werden kann, daß er auf einer bestimmten Linie liegt. Wir merken hier folgende Aussagen: Er hat von einem Punkte eine bestimmte Entfernung, er hat von 2 Punkten gleiche Entfernung, er hat von einer Linie eine bestimmte Entfernung, er hat von 2 Linien gleiche Entfernung.

35. Die Bedingung, daß ein Punkt von einem bestimmten Punkte eine bestimmte Entfernung hat, führt zu der Folgerung, daß er auf einem Kreise liegt. Zu einer solchen Folgerung gelangt man indessen auch durch andere Bedingungen. Ist nämlich ein Punkt der Scheitelpunkt eines Winkels von bestimmter Größe und gehen seine Schenkel durch bestimmte Punkte, so liegt er auf einem bestimmten Kreisbogen. Diese Folgerung findet auf geometrische Sätze in der Art oft Anwendung, daß man zeigen kann, daß ein Punkt auf einem Kreise liegt, der durch 3 Punkte bestimmt ist.

36. Denkt man sich für einen Punkt eine solche Bedingung aufgestellt, daß daraus der Schluß gezogen werden kann, er liegt auf einer bestimmten Linie, so heißt diese Linie der geometrische Ort des Punktes, welcher jener Bedingung entspricht. Beispiel: Der geometrische Ort des Punktes, der von 2 Punkten gleiche Entfernung hat, ist das im Mittelpunkt der Verbindungslinie errichtete Lot. Insofern einer Bedingung für einen Punkt im allgemeinen ein geometrischer Ort entspricht, so sehen wir, daß ein Punkt durch 2 geometrische Örter bestimmt wird.

37. Stellt man für eine Gerade eine Bedingung auf, so wird sie dadurch noch nicht bestimmt, es wird vielmehr unendlich viele Geraden geben, welche alle diese Bedingung erfüllen, genau ebenso wie es auch unendlich viele Punkte giebt, die einer Bedingung entsprechen. Nach der Analogie könnte man hier nach dem geometrischen Ort der Geraden fragen. Da die Sprache aber für Punkt und Gerade andere Ausdrücke

hat (der Punkt liegt in der Geraden, die Gerade geht durch den Punkt), so wird auch hier eine andere Ausdrucksweise am Platze sein. Man wird hier von einer Enveloppe oder auch einem festen Elemente einer Geraden sprechen. Soll z. B. das Verhältnis der Entfernungen einer Geraden von 2 bestimmten Punkten fest bleiben, so läßt sich zeigen, daß die Gerade stets durch einen bestimmten Punkt gehen muß. Dieser Punkt ist dann das feste Element oder die Enveloppe der Geraden. Soll eine Gerade von einem Punkte stets eine bestimmte Entfernung haben, so würde ein Kreis, den die Gerade stets berührt, als Enveloppe der Geraden anzusehen sein.

38. In betreff der Aussagen, daß ein Punkt auf einer bestimmten Geraden liegt, daß eine Gerade durch einen bestimmten Punkt geht, sei bemerkt, daß die eine leicht auf die andere zurückgeführt werden kann. Soll nämlich der Punkt C auf der Geraden AB liegen, so heißt dies so viel als daß die Gerade AB durch den Punkt C gehen soll. Man kann hiernach für einen Satz verschiedene Formen erhalten. Diejenige Form wird die beste sein, bei welcher die Gebilde in einer möglichst symmetrischen Gestalt ausgedrückt werden. Ein einfaches Beispiel stelle dies klar.

Zieht man in einem Dreieck ABC die Schwerlinien von den Ecken A und B, so werden sich dieselben in einem Punkte S schneiden. Derselbe liegt mit der Ecke C und dem Mittelpunkt von AB in einer Geraden. Es würde also folgender Satz stattfinden: Der Schnittpunkt von 2 Schwerlinien eines Dreiecks liegt mit der dritten Ecke und dem Mittelpunkt der Gegenseite in einer Geraden.

Einfacher und symmetrischer heißt dieser Satz:

Die 3 Schwerlinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Man wird umgekehrt auch oft die Aussage von 3 Geraden, welche durch einen Punkt gehen auf die zurückführen, daß 3 Punkte in einer Geraden liegen, wenn der Satz dadurch eine symmetrische Gestalt annimmt.

Soll jedoch der Beweis geführt werden, so wird es in den meisten Fällen von Vorteil sein, eine Form erst in eine andere überzuführen, wie überhaupt die Überführung einer Form in eine andere von Vorteil ist; ganz besonders wichtig ist dies, wenn für Gerade die Bedingungen auftreten, parallel oder senkrecht zu andern zu sein.

39. Die Aussagen, daß 3 durch verschiedene Bedingungen bestimmte Gerade durch einen Punkt gehen, daß 3 durch verschiedene Bedingungen bestimmte Punkte auf einer Geraden liegen, sind vorher schon hervorgehoben. Die Anzahl der Geraden und Punkte kann natürlich auch oft mehr betragen. Von besonderer Bedeutung kann diese Aussage noch

werden, wenn 4 Gebilde vorhanden sind. Vier Gerade durch einen Punkt, 4 Punkte auf einer Geraden haben nämlich dann eine besondere Lage, wenn sie harmonisch sind.

40. Durch die Hinzunahme des Kreises als Elementargebilde vermehrt sich die Anzahl der allgemeinen Aussagen sehr bedeutend. Man untersucht hier Punkte, welche der Peripherie des Kreises angehören, Gerade, welche Tangenten zu einem Kreise sind, der in vielen Fällen nur durch gewisse Bedingungen bestimmt gedacht wird. Auch können Gerade und Punkte noch auf andere Weise auf den Kreis bezogen werden.

Bei 2 Kreisen ist von Bedeutung die Aussage, daß sie sich berühren, konzentrisch sind, sich rechtwinklig schneiden. Bei 3 Kreisen ist der Fall wichtig, daß sie sich in denselben Punkten schneiden (allgemeiner, daß sie einer Schar angehören), endlich auch, daß sie durch einen Punkt gehen.

41. Verwickeltere Sätze werden durch Einführung neuer Begriffe mehr übersichtlich und einheitlich dargestellt. Beim Dreieck giebt es z. B. sogenannte merkwürdige Punkte, den Schwerpunkt, den Mittelpunkt des Umkreises ꝛc. Haben nun 2 Dreiecke, deren Ecken verschieden, aber in besonderer Weise voneinander abhängig sind, den Schwerpunkt gemein, so hat man damit eine merkwürdige Aussage gewonnen. Zwar kommt diese Aussage im wesentlichen darauf zurück, daß der Schnittpunkt von 2 Geraden m und n mit dem Schnittpunkt von 2 anderen Geraden m_1 und n_1 übereinstimmt, doch ist diese Aussage auf eine einfache Form gebracht und zugleich umfassender, insofern der Punkt auf verschiedene Weise in den Dreiecken bestimmt werden kann.

Auf den Begriff der Kongruenz ist schon früher aufmerksam gemacht, es sei noch auf die Ähnlichkeit, Kollineation und Projektivität der Figuren hingewiesen.

Bem. Die angegebenen allgemeinen Ziele sind zwar nicht vollständig angegeben, doch ist eine Übersicht hiermit gewonnen, soweit Punkt, Gerade, Kreis als Grundgebilde angesehen werden. Auch für die Darstellung einfacher Eigenschaften von Kegelschnitten ist ein Fundament geschaffen.

42. Im allgemeinen hängen die Eigenschaften der Figuren voneinander ab; d. h. eine Eigenschaft zieht die andere nach sich. Einige solcher Eigenschaften werden als Erweiterungen von andern bezeichnet.

Die Erweiterung besteht im wesentlichen darin, daß statt einer Bedingung von bestimmtem Charakter eine andere eintritt, die eine gewisse Willkür noch enthält. Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel.

Satz: Konstruiert man über den Seiten eines Dreiecks nach außen gleichseitige Dreiecke, so schneiden sich die Verbindungslinien der Ecken

des Grunddreiecks mit den Spitzen der gleichseitigen Dreiecke über den Gegenseiten in einem Punkte.

Dieser Satz läßt sich zu folgendem erweitern:

Konstruiert man über den Seiten eines Dreiecks nach außen gleichschenklige ähnliche Dreiecke, so schneiden sich die Verbindungslinien der Ecken des Dreiecks mit den Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke über den Gegenseiten in einem Punkte.

In diesem Satze ist die Bedingung, daß die Dreiecke gleichseitig sein müssen, fallen gelassen, es tritt eine Bedingung ein, die noch eine Willkür enthält, hier also den Winkel an der Grundlinie. Jener erste Satz muß natürlich stets in diesem enthalten sein. Daß dies hier der Fall ist, folgt daraus, daß alle gleichseitigen Dreiecke untereinander ähnlich sind. Es sei dann aber bemerkt, daß in dem allgemeinen Fall auch noch andere besondere Fälle enthalten sind. Man kann z. B. aus der angegebenen erweiterten Eigenschaft den Schluß ziehen, daß die Schwerlinien und die Höhen sich in einem Punkte schneiden müssen.

43. Von einer Erweiterung einer Eigenschaft kann man noch eine Ausdehnung unterscheiden. Die Ausdehnung bezieht sich darauf, daß man eine Beschränkung fallen läßt, die nicht eine bestimmende Bedingung für ein Gebilde ist. In dem oben genannten Satze war gesagt, daß die Dreiecke nach außen konstruiert werden sollten. Diese Bedingung dient nicht dazu, die Dreiecke näher zu bestimmen, sie legt der Lage der Spitzen vielmehr nur eine Beschränkung auf. Der Satz läßt sich nun auf den Fall ausdehnen, daß die gleichschenkligen bez. gleichseitigen Dreiecke über den Seiten mit dem Grunddreiecke in demselben Flächenteil konstruiert werden. Indem wir den Satz auch für diesen Fall beweisen, haben wir dem Satze eine Ausdehnung gegeben.

Die neuere Geometrie lehrt, daß solche Ausdehnungen stets stattfinden, jedoch ist zuweilen die strenge Form nicht gleich erkenntlich. Indem z. B. Sätze von 2 sich schneidenden Kreisen auf solche ausgedehnt werden, die sich nicht schneiden, so ist an sich noch nicht klar, was an Stelle der Schnittpunkte einzutreten hat. Wie dem auch sei, eine Ausdehnung von Sätzen in diesem Sinne läßt sich stets nachweisen.

44. Der Gegensatz der Erweiterung einer Eigenschaft ist die Specialisierung derselben. Hier wird von einer allgemeinen Eigenschaft auf eine besondere geschlossen. Wir schließen z. B. von dem allgemeinen Satz, der sich auf die ähnlichen gleichschenkligen Dreiecke bezieht, auf den speciellen von den gleichseitigen Dreiecken. Der Satz von dem Schneiden der Schwerlinien ist ebenfalls ein specieller Fall des vorher angegebenen; doch kann er auch als specieller Fall eines andern angesehen werden, z. B. des Satzes von Ceva: In jedem Dreieck schneiden

sich 3 Ecktransversalen in einem Punkte, wenn das Produkt von 3 anstoßenden Teilstücken der Seiten, welche durch die Transversalen gebildet werden, gleich dem Produkt der 3 andern ist.

Hervorragendes Interresse haben solche Specialeigenschaften, wenn sich noch andere Eigenschaften daran knüpfen.

Als eine specielle Eigenschaft ist noch der Fall aufzufassen, wenn eine Kurve (krumme Linie) in eine Linie besonderer Art, z. B. eine Ellipse in einen Kreis, ein Kreis in eine Gerade übergeht. Man bezeichnet dies als Degenerieren. Man hat z. B. den Satz: Der geometrische Ort des Punktes, dessen Entfernungen von 2 Punkten ein gegebenes Verhältnis haben, ist ein Kreis. Ist das Verhältnis 1 oder mit andern Worten, werden die Entfernungen gleich, so ist der Ort eine Gerade. Dies widerspricht dem Hauptsatze nicht, da die Gerade als Kreis mit unendlich großem Radius anzusehen ist, es ist der Satz also als specieller Fall des allgemeinen anzusehen.

45. Zur Erweiterung von Eigenschaften gelangt man durch Induktion. Vermittelst Specialisierung verschiedener Sätze, die auf eine allgemeine Figur angewandt werden, gelangt man durch Deduktion zum Beweise von Sätzen. Öfter auch müssen die Sätze in ihrer allgemeinen Form zur Anwendung gebracht werden. Im allgemeinen wird eine Verbindung von beiden Methoden am besten sein.

46. Geometrische Sätze können durch analytische und synthetische Methoden bewiesen werden. Die analytische Methode bedient sich zur Beweisführung des Koordinatensystems. Die Bedingungen für Punkte, Gerade, Kurven werden durch die Koordinaten oder Gleichungen streng eingeführt. Da alle Beweise wesentlich darauf beruhen, die Bedingungen zu benutzen, so hat man durch die analytische Methode ein ziemlich sicheres Hilfsmittel zur Beweisführung gefunden. Nur die verwickelte Form der Gleichungen legt der Anwendung dieser Methode oft Hindernisse in den Weg. Immerhin ist sie ein vorzügliches Hilfsmittel und von hervorragender Bedeutung für die Lösung gewisser Aufgaben, z. B. der Bestimmung von geometrischen Örtern der Punkte und der festen Elemente (Enveloppen) von Geraden.

Die synthetische Methode besitzt noch keine Hifsmittel, die Bedingungen in strenger und erschöpfender Weise einzuführen, so daß der synthetische Beweis nicht so sicher als der analytische ist. In gewissen Fällen, wobei natürlich die Einführung der Bedingungen erschöpfend ist, wird der Beweis aber einfacher, und ist wegen der Vielseitigkeit der Einführung der Bedingungen sehr anregend.

47. Man unterscheidet die synthetischen Beweise noch als direkte und indirekte. Der naturgemäße Gang ist der direkte. Der indirekte

wird da angewandt, wo es sich um die Umkehrung eines Satzes handelt. Es wird gezeigt, daß das Gegenteil der Behauptung nicht stattfinden kann. Man wird die indirekten Beweise nicht ganz entbehren können, indessen wird es bei wenigen Sätzen nur nötig sein, sie anzuwenden.

48. Der Gang eines synthetischen Beweises ist im wesentlichen folgender: Zunächst stellt man mit Benutzung einiger Bedingungen und gewisser Fundamentalsätze eine Eigenschaft A fest. Diese Eigenschaft tritt nun gleichsam als neue Bedingung auf. Indem wir sie mit noch nicht benutzten Bedingungen kombinieren, erhalten wir die Eigenschaft B. Auf diese Weise geht es entsprechend weiter. Unter allen Umständen sind alle Bedingungen zu benutzen, ja es wird in sehr vielen Fällen manche Bedingung mehrmals benutzt werden. Endlich wird man zur verlangten Eigenschaft kommen.

Zuweilen verfährt man auch so, daß man sich fragt, aus welcher Eigenschaft B die verlangte Eigenschaft C gefolgert werden kann. Man sucht dann die Eigenschaft B zu erhalten, wobei man ebenso fragen kann, aus welcher Eigenschaft A diese gefolgert werden kann und so fort. Es bleibt dann schließlich noch der Nachweis zu führen, daß die Eigenschaft A notwendig zur Eigenschaft B, und letztere zu C führt. Man bezeichnet einen solchen Gang oft als analytisch-synthetisch, doch ist es wohl nicht nötig, dafür einen besonderen Namen einzuführen, da die Art der Untersuchung von jener andern nicht wesentlich verschieden ist. Um zum Finden der Beweise anzuleiten, ist jene Methode nicht wohl zu entbehren, in der Darstellung der Beweise wird man besser rein synthetisch verfahren. Man kann im ganzen folgendes behaupten: Gelingt es, die Bedingungen für Punkte, Gerade, Kreise u. s. w. erschöpfend so einzuführen, daß sich Folgerungen daran schließen, die man mit andern Bedingungen kombinieren kann, so ist damit der Gang des Beweises festgestellt.

C. Einige allgemeine Regeln zur Erlangung von Übung in den Beweisen und die wichtigsten Hilfsmittel derselben.

49. Die letzten Gründe für die Richtigkeit von Sätzen sind die Grundsätze, die wohl bei allen Beweisen zur Anwendung kommen. Um also Sicherheit in der Beweisführung zu erlangen, ist das volle Verständnis der Grundsätze nötig. So einfach dieselben sind, so wird auch hier einige Übung nützlich, ja sogar notwendig sein. Im ganzen wird man wohl durch wenige Übungen zur Fertigkeit gelangen, besonders wenn man bei späteren Übungen diese Folgerungen noch aufmerksam

beachtet. Dabei suche man die Sätze zunächst so umzuformen, daß das zu erreichende Ziel in bekannter Form erscheint.

50. Außer den Grundsätzen giebt es eine Anzahl von Fundamentalsätzen, die ebenfalls in der Weise zur Anschauung gebracht sein müssen, daß man ihre Anwendung sofort einsieht. Dazu sind zu rechnen die Sätze von den Scheitel- und Nebenwinkeln, die Sätze von den Winkeln bei parallelen Linien, von den Winkeln des Dreiecks, vom gleichschenkligen Dreieck, von der Kongruenz der Dreiecke, vom Parallelogramm, vom Trapez, von der Tangente, vom Peripheriewinkel im Kreise. — Zwar wird die Bedeutung dieser Sätze besonders aus der Anwendung erkannt, sie können aber andererseits nicht angewendet werden, wenn sie nicht vorher erkannt sind. Bei den ersten Beweisen wird man daher die Anwendung suchen lassen. Indem dadurch die Benutzung der Bedingungen eingeübt wird, ist der Hauptschritt zur Einführung in die Beweismethoden geschehen.*)

51. Die Grundgedanken, auf denen der Beweis beruht, sind angegeben; es seien aber noch einige Punkte erwähnt, die dem Anfänger Schwierigkeiten bereiten. Jeder Punkt und jede Gerade, von denen eine Aussage gemacht werden soll, muß durch 2 Bedingungen bestimmt werden. Soll man z. B. beweisen, daß sich 3 Gerade in einem Punkte schneiden, so muß der betreffende Punkt zunächst der Schnittpunkt von 2 Geraden sein. Hieraus muß dann eine Folgerung gemacht werden, so daß dieser Punkt nicht nur der Schnittpunkt der beiden Geraden ist, sondern noch irgend eine Eigenschaft hat, aus der sich die Folgerung ziehen läßt, daß er auf der dritten Geraden liegt. Man kann andererseits auch den Punkt als Bedingung zur Bestimmung der dritten Geraden anwenden, indem man noch eine der Bedingungen der dritten Geraden benutzt. Ebenso ist eine Gerade immer nur durch 2 Bedingungen bestimmt. Verbindet man also 2 Punkte A und B, so ist dies die Gerade AB. Indem man von derselben eine Eigenschaft beweist, erscheint die Gerade nicht nur als AB,. sondern als irgend eine andere Gerade, z. B. als Lot zur Geraden l, als Parallele zur Geraden m ꝛc., wodurch man zu neuen Folgerungen gelangen kann. Sollen z. B. A, B, C in einer Geraden liegen, so ist etwa zu zeigen, daß AB senkrecht zu l und ebenso auch AC senkrecht zu l ist, so daß AB und AC dieselben Linien sind. Ein Weg ist auch zu zeigen, daß B(AC)**) = 2 R ist; doch kommt dies im ganzen aufs Vorige zurück.

---

*) Ich kann nicht unterlassen, hier auf die ersten Kapitel des Werkes: Gandtner und Junghans, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben hinzuweisen.

**) Mit B(AC) bezeichnen wir den Winkel, der sonst durch ABC dargestellt wird.

52. Wie die Gerade und der Punkt durch 2, so muß ein Kreis, von dem eine Aussage gemacht werden soll, stets durch 3 Bedingungen bestimmt werden. Man wird dann aus denselben eine Folgerung ziehen, z. B. daß er noch durch einen vierten Punkt geht, der in der Figur eine besondere Bedeutung hat. Ganz besonders ist diese Folgerung dann wichtig, wenn der Kreis behufs des Beweises als Hilfsgebilde auftritt. Er wird ein wichtiges Hilfsmittel geben, um gewisse Winkel als gleich zu erweisen.

53. Oft führt die Kombination von mehreren Bedingungen zu keiner Folgerung oder wenigstens zu keiner Folgerung, die in Verbindung mit andern gegebenen Bedingungen zu neuen Folgerungen führt. In solchen Fällen muß man zu Hilfslinien seine Zuflucht nehmen. In den Fundamentalsätzen sind z. B. gleiche Längen anstoßend, parallel oder in kongruenten Dreiecken. Hat man in einer Figur gleiche Längen, die zu keinem der angegebenen Fälle passen, so muß man Hilfslinien ziehen, durch welche man zu den genannten Fällen geführt wird. Ebenso wird auch die Einführung von Hilfspunkten, bez. von Hilfskreisen notwendig sein.

54. Der Schwerpunkt des Beweises beruht in sehr vielen Fällen in der Auffindung der richtigen Hilfsgrößen. Will man z. B. beweisen, daß 2 Größen a und c gleich sind, so wird man eine Größe b suchen, von der sich zeigen läßt, daß sie sowohl gleich a als auch gleich c ist. Man wird dabei gut thun, soviel als möglich an die gegebenen Bedingungen anzuknüpfen. Selbstverständlich wird man zuweilen mehrere solcher Größen suchen müssen.

55. In andern Fällen ist es vorteilhaft, eine Eigenschaft als speciellen Fall einer allgemeinen Eigenschaft anzusehen. Man beweist dann erst die allgemeine Eigenschaft und sieht, ob die verlangte Eigenschaft sich nicht als specieller Fall der allgemeinen ergiebt. Dies tritt dann besonders auf, wenn ein Punkt der Schnittpunkt von Linien ist, aus deren Bedingungen sich nicht direkt eine Folgerung ziehen läßt. Es sei dies an einem Beispiele erörtert.

Satz. Verbindet man in einem Dreieck die Ecken mit den Berührungspunkten des Inkreises auf den Gegenseiten, so schneiden sich die Verbindungslinien in einem Punkte.

Es ist hier schwer, die Bedingungen für die Ecktransversalen so einzuführen, daß man für den Schnittpunkt von 2 Ecktransversalen eine einfache Folgerung erhält. Der Satz ergiebt sich aber als specieller Fall des Satzes von Ceva sehr leicht. Es soll damit nicht behauptet werden, daß dieser Weg allein zum Ziele führt, sondern nur, daß es zuweilen vorteilhafter ist, einen Satz als speciellen Fall eines allgemeinern anzusehen.

56. In vielen Fällen kommt es darauf an, eine Länge durch andere bez. durch Winkel mit Benutzung trigonometrischer Funktionen auszudrücken. Hier kommen vor allen Dingen die Sätze des Rechnens zur Anwendung. Von geometrischen Sätzen gebraucht man dabei besonders den Pythagoras und die Sätze von der Ähnlichkeit der Figuren. Dabei sei noch besonders auf die Darstellung einer Fläche durch Summe und Differenz aufmerksam gemacht. Ist eine Fläche gleich der Summe oder Differenz von andern, so wird man beim Beweise gewisse Längen durch Summe und Differenz einführen.

57. Welche Sätze beim Beweise eines Satzes am besten zur Anwendung kommen und welche Hilfslinien die besten sind, läßt sich von vornherein nicht bestimmen, man wird zum Teil auf das Probieren angewiesen sein. Es soll nachher versucht werden, in den Beispielen der ersten Abschnitte die Gründe zu entwickeln, welche gerade zu dieser oder jener Hilfslinie führen. Unzweifelhaft werden in vielen Fällen andere Hilfslinien ebenso schnell ans Ziel führen. Die Wahl hängt häufig davon ab, welche Sätze dem den Beweis Suchenden geläufiger sind. Ein häufiger Gebrauch gewisser Sätze macht die Anwendung derselben geläufiger. Als allgemeinen Gesichtspunkt wollen wir nur hervorheben, daß nur solche Hilfslinien gut zu verwerten sind, die uns mittelst der gegebenen Bedingungen direkte Folgerungen geben. Man bemühe sich deshalb, bei allen Folgerungen den angewendeten Satz zu erkennen.

58. Für die ersten Übungen mögen einige Fingerzeige noch gegeben werden. In erster Linie kommt es darauf an, die Gleichheit von Strecken und Winkeln in Betracht zu ziehen. Gleiche Strecken kommen zunächst vor als Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks, in kongruenten Dreiecken, in Parallelogrammen, als Tangenten von einem Punkt. Die sich daran schließenden Folgerungen, also die Gleichheit der Winkel, die den gleichen Seiten gegenüberliegen ꝛc. sind einfach. Sind gleiche Längen nicht in solchen Figuren gegeben, so hat man sie sich durch Hilfslinien zu schaffen. Wegen der Einfachheit beim Beweise wird man gut thun, gleiche Stücke durch das Ziehen von Parallelen aneinander zu bringen, d. h. es ist besser, eine Hilfslinie parallel zu ziehen und die Gleichheit zu beweisen, als eine Länge aufzutragen und die Parallelität zu beweisen. Da Winkel mit parallelen Schenkeln gleich sind, so werden auch die Scheitelpunkte von gleichen Winkeln vorteilhaft durch Parallele übertragen. Die Parallele ist hiernach eine sehr wichtige Hilfslinie, wenn Winkel als gleich zu erweisen sind. Doch kann der Scheitelpunkt eines Winkels auch mittelst des Kreises an eine andere Stelle gebracht werden, wobei der bekannte Satz vom Peripheriewinkel zu benutzen ist.

59. Als wichtige Hilfslinien merken wir noch die Lote, die Halbierungslinien von Winkeln und die Verbindungslinien von besondern Punkten einer Figur. Weitere Gebilde, die man zu den gegebenen hinzunimmt, sind die Schnittpunkte von Geraden, die Fußpunkte der Lote von Punkten auf Gerade, die Spiegelpunkte von Punkten in Bezug auf gewisse Gerade, die Schnittpunkte von Kreisen mit Geraden oder Kreisen. Besonders wichtig ist auch die Betrachtung der Winkel im Schnittpunkte von 2 Kreisen.

60. Die rein geometrische Benutzung der Bedingungen für Punkte und Linien gelingt oft nicht; man ist dann gezwungen, die Trigonometrie anzuwenden, was freilich oft zu weitläufigen Rechnungen führt. Eine sichere Methode zur Einführung der Bedingungen auf synthetischem Wege ist noch nicht gefunden, so große Fortschritte auch seit Steiner darin gemacht sind. In dieser Hinsicht kann die analytische Methode, welche sich der Koordinaten bedient, als sicherer angesehen werden; indessen wird der synthetische Beweis den analytischen an Einfachheit oft übertreffen, so sehr auch das analytische Beweisverfahren schon vervollkommnet ist.

Zweiter Teil.

Erläuterung der Beweismethoden durch Beispiele.

A. Erste Stufe.

Grundsätze, Fundamentalsätze über die Parallelen, das gleichschenklige Dreieck, Kongruenz der Dreiecke, Peripheriewinkelsatz.

1. Hat man auf einer Geraden die Punkte ADEB, wobei die Reihenfolge der Punkte zugleich die angegebene ist, und $AD = EB$, so ist auch $AE = DB$ und der Mittelpunkt von AB zugleich der von DE.

Anzuwenden sind die Grundsätze: Gleiches zu Gleichem giebt Gleiches; Gleiches vom Gleichem giebt Gleiches.

2. Ist eine Strecke AB in G geteilt und M der Mittelpunkt von AB, so ist $GM = \frac{1}{2}(GB - AG)$, vorausgesetzt $GB > AG$.

Bew. (Fig. 2). Da in dem Satze die Strecke $GB - AG$ vorkommt, so wird man dieselbe darstellen. Dies kann auf zweifache Weise geschehen; man kann AG von G und von B aus abschneiden. Schneidet man von B aus die Strecke bis F ab, so ist $GF = GB - AG$. Man hat also die Bedingungen von Nr. 1. M ist der Mittelpunkt von GF und AB, woraus der Satz folgt.

3. Schneidet man die Schenkel eines Winkels A durch 2 Gerade BC und DE (Fig. 3a, 3b), so erhält man 2 Dreiecke ABC und ADE, in welchen die Summe der Winkel an den schneidenden Geraden gleich groß ist.

Bew. Es handelt sich hier einfach darum, die Bedingungen des Satzes festzustellen. Die eine Bedingung ist offenbar, daß hier 2 Dreiecke bestimmt werden, woraus man die Folgerung für die Summe der Winkel erhält. Die andere Bedingung ist die, daß sie einen Winkel gemein haben. Man erkennt dann leicht den Grundsatz, welcher den Beweis vervollständigt.

4. Stimmen 2 gleichschenklige Dreiecke im Winkel an der Spitze überein, so auch in den Winkeln an der Grundlinie.

Bew. Die Bedingungen dieſes Satzes ſtimmen zunächſt mit denen des Satzes Nr. 3 überein, dazu tritt noch die Bedingung, daß je 2 Seiten der Dreiecke gleich ſind, woraus ſich ſofort eine Folgerung ergiebt. Die Anwendung des Grundſatzes 8e giebt dann den Satz.

5. Die Halbierungslinien von entgegengeſetzten Winkeln bei Parallelen ſtehen aufeinander ſenkrecht.

Bew. (Fig. 4). Es ſeien f und g die Parallelen, a die ſchneidende Gerade, ein Paar entgegengeſetzte Winkel u und v, für die wir innere nehmen können, da die Halbierungslinien von innern entgegengeſetzten Winkeln mit denen von äußern übereinſtimmen. Sind B und C die Schnittpunkte von a mit f und g (welche man auch mit (fa), (ga) bezeichnen könnte), und D der Schnittpunkt der Winkelhalbierungslinien, ſo iſt als erſte Bedingung aufzuſtellen, daß BCD ein Dreieck iſt. Die Bedingungen des Satzes führen dann zu folgenden Ausſagen:

1) $u + v = 2\,R$,
2) $B(CD) + C(DB) + D(BC) = 2\,R$,
3) $B(CD) = \frac{1}{2}\,u$, $C(DB) = \frac{1}{2}\,v$.

Da in der erſten Bedingung $u + v$ vorkommt, ſo liegt es nahe, die letzten Gleichungen zu addieren, dies giebt:

$$B(CD) + C(DB) = \tfrac{1}{2}(u + v).$$

Dieſe Gleichung giebt in Verbindung mit der erſten:

$$B(CD) + C(DB) = 1\,R.$$

Dieſe Folgerung werden wir mit Bedingung (2) kombinieren, da dieſelbe noch nicht benutzt iſt; wir finden durch Subtraktion:

$$D(BC) = 1\,R.$$

Bew. Dieſe Sätze dürften zur Einübung der Grundſätze an ſich ausreichend ſein, da in allen Sätzen die Grundſätze noch zur Anwendung kommen.

6. Wenn man einen Winkel eines Dreiecks halbiert, durch den Schnittpunkt der Halbierungslinie mit der Gegenſeite die Parallele mit dem einen Schenkel zieht, ſo ſchneidet dieſe von dem zweiten Schenkel eine Länge ab, welche ſo groß iſt, als das Stück der Parallelen innerhalb des Dreiecks.

Bew. (Fig. 5). Das Dreieck ſei ABC. Die Bedingungen des Satzes ſagen, daß CD den Winkel C halbiert und daß DE parallel zu AC gezogen iſt, dabei iſt D der Schnittpunkt mit AB und E der Schnittpunkt der Parallelen mit BC. — Suchen wir aus den Bedingungen direkte Folgerungen, ſo ergiebt ſich ſofort aus $DE \parallel AC$ die Folgerung $C(AD) = D(CE)$. Die erſte Bedingung heißt $C(AD) = C(DE)$. Wir haben hier für C(AD) 2 Ausſagen, die uns ſofort giebt $D(CE) = C(DE)$. Man wird im allgemeinen in der Unterſuchung

solche Größen vorziehen, für die man 2 Aussagen erhält. Aus $D(CE) = C(DE)$ ergiebt sich aber leicht $CE = ED$.

Eine Ausdehnung dieses Satzes erhalten wir, wenn wir den Außenwinkel halbieren. Die betreffende Halbierungslinie des Außenwinkels schneide AB in D′ und die Parallele durch D′ zu AC schneide BC in E′; dann läßt sich folgern $CE' = E'D'$.

Beim Beweise eines Satzes, der eine Ausdehnung eines Satzes bezweckt, hat man nur darauf zu achten, daß die Bezeichnungen entsprechend gewählt und die entsprechenden Seiten, Winkel, Punkte in Betracht gezogen werden. Es zeigt sich, daß der Beweis stets in gleicher Weise fortschreitet. Der Unterschied im Beweise liegt dann wesentlich nur darin, daß gelegentlich ein Zeichen anders wird, d. h. daß eine Differenz statt einer Summe auftritt, daß gewisse Punkte außerhalb einer Strecke liegen, während die entsprechenden innerhalb lagen u. s. f.

Im vorliegenden Falle haben wir

$C(AD') = C(D'E')$, $C(AD') = D'(CE')$, also $C(D'E') = D'(CE')$

und somit $CE' = E'D'$.

Die Strecke E′D′ liegt hier außerhalb des Dreiecks, aber innerhalb des Winkelraums von B.

7. Halbiert man 2 Winkel eines Dreiecks und zieht durch den Schnittpunkt der Halbierungslinien die Parallele zu dem gemeinschaftlichen Schenkel der Winkel, so werden von den andern Seiten des Dreiecks an der dritten Seite anliegende Stücke abgeschnitten, deren Summe gleich dem innerhalb des Dreiecks liegenden Stück der Parallelen ist.

Bew. (Fig. 6). Es sei ABC das Dreieck, BD und CD die sich in D schneidenden Halbierungslinien der Winkel B und C, EF die Parallele durch D zu BC, so daß EF das Stück innerhalb des Dreiecks ist; es soll bewiesen werden: $EF = EB + FC$.

Da eine Länge gleich der Summe von 2 andern sein soll, so muß diese entweder in 2 Teile zerlegt werden, von denen jeder gleich einem Summanden sein muß, oder man muß die beiden Längen EB und FC zu einer Länge zusammenfügen. Würde man etwa EB um FC verlängern, so würde sich keine einfache Folgerung anknüpfen, da die dann erhaltenen gleichen Stücke weder parallel sind, noch aneinander stoßen; es wird daher besser sein, EF in 2 Teile zu zerlegen. Hier ist die Zerlegung in ED und DF eine sehr natürliche und daher zunächst zu untersuchen. Man wird leicht finden, daß man wie in Nr. 6 den Beweis führen kann, daß $DF = FC$ und $ED = EB$ ist.

Der Satz läßt sich in zweierlei Weise ausdehnen. Die eine Ausdehnung erhalten wir, wenn wir die Außenwinkel B und C halbieren

und durch den Schnittpunkt D' die Parallele E'F' ziehen. E'F' liegt hier zwar außerhalb des Dreiecks, aber innerhalb des Winkelraumes C. Es ist hier $E'F' = E'B + CF'$.

Die andere Ausdehnung finden wir, wenn wir einen Außen- und einen Innenwinkel halbieren. Es möge die Halbierungslinie des Außenwinkels von B die Halbierungslinie des Innenwinkels von C in D'' schneiden, und die Parallele durch D'' zu BC möge AB und AC in E'' und F'' schneiden; dann ist, wenn $B > C$, $E''F'' = CF'' - E''B$.

8. In jedem Trapez liegen die Mittelpunkte der Diagonalen mit den Mittelpunkten der nicht parallelen Seiten in einer Geraden.

Bew. (Fig. 7). Das Trapez sei ABCD, AB und CD die parallelen Seiten, E der Mittelpunkt von AD, F der von BC, G der von AC, H der von BD. Aus den Bedingungen, daß E und F die Mittelpunkte der Seiten AD und BC sind, ergiebt sich die Folgerung $EF \parallel AB \parallel CD$. Diese Folgerung ist mit einer der andern Bedingungen zu verbinden, doch können wir auch erst aus den andern Bedingungen Folgerungen ziehen. Aus $AE = ED$, $AG = GC$ folgt sofort, daß $EG \parallel CD$ ist. Fragen wir nun, was folgt aus $EF \parallel CD$ und $EG \parallel CD$, so ist klar, daß dies heißt: EF ist dieselbe Gerade als EG der Lage nach, oder E, F, G liegen in einer Geraden. Es ist wohl nicht nötig noch hinzuzufügen, daß ebenso gefolgert werden kann, daß auch H auf dieser Linie liegt. — Bemerkt sei bei diesem Beweise noch, daß die Bedingung $AE = EC$ zweimal zu Folgerungen benutzt ist.

Bem. 1. Man kann ABDC auch als Trapez ansehen, welches man als überschlagenes bezeichnen kann, wobei dann GH die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Seiten ist. Da hier $GF = \frac{1}{2} AB$, $HF = \frac{1}{2} DC$, so ist $GH = \frac{1}{2}(AB - DC)$. Der Satz über dies Trapez kann somit als eine Ergänzung des entsprechenden Satzes vom gewöhnlichen Trapez angesehen werden.

Bem. 2. Man wird aus dem Satze noch die allgemeine Eigenschaft ableiten können, daß die Mittelpunkte von allen Verbindungslinien von Punkten der Parallelen AB und CD auf derselben Geraden liegen.

9. Wenn man in einem gleichschenkligen Dreieck eine der gleichen Seiten verlängert, die andere um ebensoviel verkürzt und die so erhaltenen Endpunkte verbindet, so wird die Verbindungslinie durch die Grundlinie halbiert.

Bew. Es sei (Fig. 8) ABC das gleichschenklige Dreieck mit der Spitze A, ferner $BD = CE$, so daß CE das verlängerte Stück der Seite AC ist, während AB um DB verkürzt wird. Schneidet DE die Seite BC in F, dann soll $DF = FE$ sein. Aus der Bedingung $AB = AC$ folgt zunächst $\angle B = C$. Da die gleichen Stücke BD und

CE nicht parallel sind, auch nicht aneinander stoßen, so können wir direkt diese Bedingung nicht benutzen, wir werden daher eine solche Hilfslinie ziehen, daß diese Längen in einer Lage sind, die eine Folgerung giebt. Dies kann dadurch geschehen, daß wir von C die Strecke BD auf CA abtragen; noch besser ist es, wenn wir eine solche Hilfslinie ziehen, die uns auf AC einen Punkt X giebt, dessen Abstand von C die Länge BD ist. Dies geschieht dadurch, daß wir DX ∥ BC ziehen. Man wird zwar umgekehrt aus der Bedingung CX = BD die Folgerung ziehen können DX ∥ BC; es ist jedoch im allgemeinen besser, als Hilfslinie die Parallele zu ziehen und die Folgerung der Gleichheit von Strecken daran zu knüpfen, da die Parallele eine eindeutig bestimmte Gerade ist, während das Abtragen von Strecken zuweilen doppelbeutig sein kann. Man findet hier leicht D(XA) = X(DA), also AD = AX und damit BD = XC; da nun BD = XC, BD = CE ist, so folgt XC = CE. Wir erhalten damit ein Dreieck EDX, in welchem durch den Mittelpunkt C der Seite EX die Parallele CF zu XD gezogen ist. Hieraus ergiebt sich die Folgerung DF = FE.

Bem. Es ist klar, daß die Verlängerung einer Seite größer als die Seite selbst sein kann. Ist dann CE′ > AC, so würde der entsprechende Punkt D′ außerhalb der Seite AB über A hinaus fallen. Die vorher angegebene Folgerung bleibt bestehen, nur daß der Schnittpunkt F′ auf der Grundlinie außerhalb der begrenzten Strecke liegt.

10. Die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks bilden die Ecken eines Parallelogramms.

Bew. (Fig. 9). Es sei ABCD das Viereck, und E, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA; zu beweisen ist, daß EFGH ein Parallelogramm ist. Fragen wir uns zuerst, aus welchen Bedingungen wir diese Folgerung ziehen können, so sind es folgende:

a) HE = GF, HG = EF;
b) HE = GF, HE ∥ GF,
c) HF und EG halbieren sich gegenseitig.

Die Bedingungen HG = EF, HG ∥ EF können wir auslassen, da sie sich von den Bedingungen (b) nicht unterscheiden; eine einfache Vertauschung der Buchstaben führt dazu. Im allgemeinen erscheinen die Aussagen (a) und (b) als die einfachern, die wir daher zu beweisen suchen. Wenn wir nun HE = GF zu beweisen suchen, so werden wir diese Größen mit einer dritten zu vergleichen haben. Nun ist aber HE die Verbindungslinie der Mittelpunkte von 2 Seiten des Dreiecks ABD, also ist HE = ½ BD. Man sieht dann leicht aus Dreieck CBD ein, daß auch GF = ½ BD ist; also HE = GF. Daß HG = EF ebenso durch die Dreiecke ADC und ABC zu beweisen ist, liegt sehr nahe.

Der Beweis durch die Aussagen (b) ist ebenso einfach. Bei diesem Satze ist man leicht versucht, auch die Mittelpunkte der Diagonalen AC und BD hineinzuziehen. Es ergiebt sich, daß $JE = \frac{1}{2} BC$, $GK = \frac{1}{2} BC$ ist, wo J und K die Mittelpunkte von AC und BD sind. Da auch $GJ = KE$ ist, so ist GJEK und endlich auch HJFK ein Parallelogramm. Daraus folgt noch, daß sich HF, EG, JK gegenseitig halbieren.

11. Die Schwerlinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Bew. (Fig. 10). Das Dreieck sei ABC, darin seien AD und BE 2 Schwerlinien, die sich in G schneiden mögen. Ist F der Mittelpunkt von AB, so soll bewiesen werden, daß CF durch G geht. Hierbei thun wir zunächst gut, die Folgerung umzukehren und zu beweisen, daß CG durch F geht; da F der Mittelpunkt von AB ist, so ist einfach zu zeigen, daß der Schnittpunkt von CG mit AB die Länge AB halbiert. Nach I Nr. 51 haben wir von dem Schnittpunkte der beiden Schwerlinien AD, BE eine Folgerung zu machen, wobei nebenbei nochmals eingeschärft werde, daß ein Punkt nur durch 2 Bedingungen bestimmt werden darf. Fragen wir nach Folgerungen aus $AE = EC$, $BD = DC$, so ergiebt sich daraus $DE \parallel AB$, auch $DE = \frac{1}{2} AB$. Weitere Folgerungen wären die Ähnlichkeit der Dreiecke DGE und ABG, woraus sich Folgerungen für G anschließen. Es soll aber versucht werden, ohne die Benutzung von Ähnlichkeitssätzen ans Ziel zu gelangen. Dazu wird dann eine Hilfslinie nötig sein. Eine solche ist offenbar die Parallele durch C zu BE, welche AD in L schneide. Wir haben dann ein Dreieck ALC, in welchem durch den Mittelpunkt E einer Seite die Parallele zu einer zweiten gezogen ist, eine Figur, welche vielfache Anwendung findet. Vielleicht ist es hier aber noch besser, die Hilfslinie so einzurichten, daß sich die Parallelität derselben als Folgerung ergiebt. Wir erhalten diese Folgerung, wenn wir GD um sich selbst bis L verlängern, da hier ein Viereck BGCL erhalten wird, in welchem sich die Diagonalen gegenseitig halbieren. Zugleich folgt auch, daß $LB \parallel CG$ ist. Da also bei der zuletzt angenommenen Hilfslinie $DL = GD$, die Gerade $CL \parallel BE$ ist, so folgt $AG = GL$, dann aber folgt hieraus und aus $LB \parallel GF$, daß auch $BF = FA$ ist, was zu beweisen war.

Man findet aber noch mehr; da nämlich $GD = \frac{1}{2} GL = \frac{1}{2} AG$ ist, so wird die Schwerlinie AD in G nach dem Verhältnis 2 : 1 geteilt, welche Eigenschaft natürlich alle Schwerlinien haben.

12. Die Halbierungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Bew. (Fig. 11). Es sei ABC das betrachtete Dreieck. Der Schnittpunkt der 3 Winkelhalbierungslinien muß zunächst als Schnittpunkt von 2 Halbierungslinien bestimmt werden. Es mögen sich also die Halbierungslinien der Winkel B und C in O schneiden; wie früher erwähnt ist, muß von diesem Punkte erst eine Folgerung gezogen werden. Eine solche ist hier sehr einfach, da wir nur die Grundeigenschaft der Winkelhalbierungslinie benutzen dürfen. Diese ist, daß jeder Punkt der Halbierungslinie eines Winkels von den Schenkeln gleichen (senkrechten) Abstand hat. Der Kürze halber sei folgende Bezeichnung eingeführt: Ist P ein Punkt und l eine Gerade, so soll P,l den (senkrechten) Abstand der Gebilde darstellen. Bezeichnen wir die Seiten BC, CA, AB mit a, b, c, so finden wir aus der Bestimmung von O die Gleichungen O,c = O,a; O,a = O,b. Daraus folgt sofort O,c = O,b, d. h. O hat von den Schenkeln des Winkels A gleichen Abstand, muß also auf der Halbierungslinie von A liegen und zwar des innern Winkels A, da O innerhalb liegt. Man wird dann umgekehrt auch sagen, die Halbierungslinie von A geht durch O.

Bem. Dieser Satz erlaubt leicht eine Ausdehnung auf den Fall der äußern Winkelhalbierungslinien in Verbindung mit den innern, auf welche indessen erst später eingegangen werden soll, da noch andere Eigenschaften des Dreiecks damit in Verbindung stehen. — Bekanntlich heißt der hier bestimmte Punkt O der Mittelpunkt des Inkreises.

13. Die in den Mitten der Seiten eines Dreiecks errichteten Lote (Mittelsenkrechte) schneiden sich in einem Punkte.

Bew. (Fig. 12). Das Dreieck sei ABC, die Mittelpunkte der Seiten D, E, F. Der Schnittpunkt der 3 Lote muß natürlich als Schnittpunkt von 2 Loten bestimmt werden und daraus eine Folgerung gezogen werden. Es mögen also die in E und F errichteten Lote sich in M schneiden. Aus der Eigenschaft dieser Mittelsenkrechten, wie diese Lote bezeichnet werden, folgen sofort die Gleichungen MA = MB, MA = MC, woraus MB = MC folgt. Da also M von B und C gleichen Abstand hat, so muß auch das in D auf BC errichtete Lot durch M gehen.

Bekannt ist, daß M der Mittelpunkt des Umkreises heißt.

14. Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Bew. (Fig. 13). Im Dreieck ABC seien BE und CF 2 Höhen, die sich in H schneiden; es soll dann bewiesen werden, daß die dritte Höhe AD ebenfalls durch H geht. Ist ein Lot die Mittelsenkrechte einer Geraden, so knüpft sich an die Punkte derselben eine einfache Folgerung. Eine ebensolche einfache Folgerung knüpft sich aber nicht an den Fall, den wir hier haben. Daher wird es hier gut sein, Bedingung und

Folgerung umzukehren, was ja in vielen andern Fällen von Bedeutung ist. Wir werden also beweisen, daß die Gerade AH senkrecht zu BC ist. Ist D der Schnittpunkt von AH mit BC, so ist zu zeigen D(AB) = 1 R. Soll bewiesen werden, daß ein Winkel ein Rechter ist, so muß er also entweder einem Winkel gleich sein, von dem aus der Bedingung oder einem bekannten einfachen Satze folgt, daß er ein Rechter ist, oder es kann auch gezeigt werden, daß er seinem Nebenwinkel gleich ist. Für unsern Fall angewendet, würde zu zeigen sein: D(AB) = D(AC) oder D(AB) = F(BC).

Zunächst werden wir nach einer Folgerung suchen, die sich aus BE ⊥ AC, CF ⊥ AB ergiebt. Es ergiebt sich leicht, daß B, C, E, F auf einem Kreise mit dem Durchmesser BC liegen. Dieselbe Bedingung giebt uns die Folgerung, daß die Punkte F und E auf einem Kreise mit dem Durchmesser AH liegen. Hierdurch haben wir zugleich eine Folgerung für den Punkt H gefunden, die ja durchaus nötig ist. Auch sei bemerkt, daß die Bedingungen der Figur erst hierdurch genügend ausgenutzt sind. Da wir somit 2 sich schneidende Kreise erhalten haben, so werden wir die Winkel an einem Schnittpunkte untersuchen. Da finden wir leicht E(FH) = A(FH), ferner E(FH) oder E(FB) = C(FB); daraus folgt dann A(FH) oder A(DB) = C(FB). Nun haben wir 2 Dreiecke, nämlich ABD und CFB, die in 2 Winkeln übereinstimmen. Da sie also denselben dritten Winkel haben, so folgt D(BA) = F(BC) = 1 R.

Bem. 1. Es macht beim Beweise keinen Unterschied, ob das Dreieck spitz- oder stumpfwinklig ist, auch ist es wohl an sich klar, daß beim rechtwinkligen Dreieck der Scheitel des rechten Winkels der Höhenschnittpunkt ist.

Bem. 2. Die in 11—14 behandelten Linien des Dreiecks führen zu den sogenannten ersten 4 merkwürdigen Punkten des Dreiecks.

15. Wenn man in einem Dreieck die Höhen bis zum Umkreise verlängert, so sind die verlängerten Stücke gleich den untern Höhenstücken.

Bew. (Fig. 13). Wir nehmen zunächst ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Höhen AD, BE, CF an, die sich (Nr. 14) in H schneiden mögen. Schneidet nun AD den Umkreis von ABC in Hα, so ist zu beweisen HD = DHα. Zunächst müssen die Bedingungen eingeführt werden, welche H bestimmen. Diese sind BE ⊥ AC, CF ⊥ AB, AD ⊥ BC, von denen 2 genügen können; es wird indessen gut sein, alle aufzustellen, da vorher nicht festgestellt werden kann, welche Bedingungen die besten sind; es ist auch möglich, daß alle nötig sind. Dann ist die Bedingung einzuführen, daß Hα auf dem Umkreise liegt.

Diese letzte Bedingung führt uns zur Folgerung, daß $B(H_\alpha C) = A(H_\alpha C)$ ist. Da wir von $A(H_\alpha C)$ eine Aussage haben, so suchen wir nach einer zweiten, denn wir werden immer die Größen bevorzugen, die schon einmal aufgetreten sind. Man wird aber leicht finden $A(H_\alpha C)$ oder $A(DC) = B(EC)$; dies führt dann zur Folgerung $B(H_\alpha C) = B(EC)$. Aus dieser Folgerung suchen wir durch Verbindung mit einer andern Bedingung oder Folgerung eine neue. Da nun leicht gesehen wird, daß $B(DH) = B(DH_\alpha) = 1\,R$ ist, so werden wir dadurch zur Betrachtung der Dreiecke BDH und BDH_α geführt, deren Kongruenz durch jene Aussagen in Verbindung mit $BD = BD$ bewiesen ist. Damit ist auch der Satz bewiesen.

Betrachten wir den Satz für ein stumpfwinkliges Dreieck. Wir können dieselbe Figur benutzen, indem wir als solches Dreieck BHC annehmen, dessen Höhenschnittpunkt A ist. Da $H(BC) = 2\,R - A(BC)$ ist, so ist der Radius des Umkreises derselbe, der Mittelpunkt desselben ist der Spiegelpunkt des Mittelpunktes von ABC in Bezug auf BC. Schneidet dann HD den Umkreis von BHC in A'_α, so läßt sich genau wie vorher beweisen, daß $AD = DA'_\alpha$ ist. Die andern Höhen sind BF auf HC, und CE auf BH. Die untern Höhenstücke sind AF und AE, nämlich die Stücke vom Höhenschnittpunkt bis zu den Seiten. Diese Höhen werden den Umkreis von BHC bez. in A'_β und A'_γ schneiden. Es ist nun $C(HA'_\gamma) = B(HA'_\gamma)$ und $C(HA'_\gamma)$ oder $C(FA) = B(AE)$, also $B(HA'_\gamma) = B(AE)$. Dies giebt in Verbindung mit $E(AB) = E(A'_\gamma B) = 1\,R$ und $BE = BE$ die Folgerung $AE = EA'_\gamma$. Ebenso ist natürlich $AF = FA'_\beta$. In diesem Falle würde Verlängerung bis zum Umkreise nicht die richtige Bezeichnung sein; der Satz würde besser die Form erhalten: In jedem Dreieck ist das Höhenstück vom Höhenschnittpunkt bis zur Seite gleich dem Stück von der Seite bis zum Umkreise. Diese Form würde zugleich für alle Fälle passen.

16. Das Dreieck aus den Höhenfußpunkten als Ecken hat die Eigenschaft, daß die Höhen des ursprünglichen Dreiecks Winkelhalbierungslinien in ihm sind.

Bew. Wir betrachten zunächst wieder ein spitzwinkliges Dreieck ABC (Fig. 13), dessen Höhen AD, BE, CF sind; es ist also zu beweisen: $D(EA) = D(AF)$. Wir werden fragen, wie benutzen wir die Bedingungen, daß AD, BE, CF die Höhen sind. Zunächst folgern wir, daß sie sich in einem Punkte H schneiden, dann aber, daß BDHF, DCEH, AEDB u. s. f. Kreisvierecke sind. Wir finden daraus $D(HF) = B(HF)$. Es bleibt also $B(HF)$ und $D(HE)$ zu vergleichen. Daß

diese Winkel gleich sind, folgt aus dem Kreisviereck AEDB. Es ist somit DH Halbierungslinie von D(EF). Ebenso folgt, was weiter keines Beweises bedarf, daß EH und FH die andern Winkelhalbierungslinien im Dreieck DEF sind und somit H der Mittelpunkt des Inkreises.

Gehen wir von dem stumpfwinkligen Dreieck BHC aus, so ist DEF wieder das Dreieck der Höhenfußpunkte; die Höhen sind HD, BF, CE, die sich in dem Höhenschnittpunkt A schneiden. Da $FA \perp FH$, so ist FA die Halbierungslinie des Außenwinkels F(DE), ebenso EA die Halbierungslinie des Außenwinkels E(FD). In diesem Falle sind also die Höhen des Grunddreiecks eine innere und 2 äußere Winkelhalbierungslinien des abgeleiteten Dreiecks.

Bem. An die Betrachtung solcher Dreiecke, die in dem Zusammenhange stehen, daß ein merkwürdiger Punkt des einen Dreiecks ein anderer merkwürdiger Punkt des andern Dreiecks ist, knüpfen sich oft eine Menge interessanter Eigenschaften.

17. Der Kreis, welcher durch die Höhenfußpunkte eines Dreiecks gelegt wird, geht auch durch die Mittelpunkte der Seiten.

(Der Kreis heißt der Feuerbachsche Kreis, auch Neunpunktekreis).

Bew. 1. (Fig. 13) Die Bezeichnung sei wie in 14—16; ABC das Dreieck, DFF die Höhenfußpunkte, A_0, B_0, C_0 die Mittelpunkte der Seiten. Zunächst läßt sich der Satz umkehren, indem man beweist, daß der Kreis durch A_0, B_0, C_0 auch durch D, E, F geht, denn durch 3 Punkte wird der Kreis eindeutig bestimmt. Zu dem Ende ist nur zu beweisen, daß $DA_0B_0C_0$ ein Kreisviereck ist oder $D(A_0C_0) + B_0(A_0C_0) = 2\,R$ oder endlich $D(BC_0) = B_0(A_0C_0)$. Indem wir zu den Punkten $A_0B_0C_0$ den Punkt B hinzunehmen, finden wir, daß diese Figur ein Parallelogramm ist; doch sind die Bedingungen der Figur noch nicht vollständig ausgenutzt. Wir finden zunächst daraus $B_0(A_0C_0) = B(C_0A_0)$. Ziehen wir noch C_0D, so ergiebt sich $C_0D = C_0B$, wobei die Bedingungen $D(AB) = 1\,R$ und $AC_0 = C_0B$ benutzt werden. Aus $C_0D = C_0B$ folgt $B(C_0D) = D(BC_0)$, somit $D(BC_0) = B_0(A_0C_0)$, woraus der Satz folgt. Ist M der Mittelpunkt des Umkreises, H der Höhenschnittpunkt, so ist der Mittelpunkt J von MH der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises.

Bem. Auf die Folgerung $C_0D = DB$ aus $D(AB) = 1\,R$ sei besonders aufmerksam gemacht.

Bew. 2. Es macht keine Schwierigkeit zu beweisen, daß DA_0EF ein Kreisviereck ist. Indem wir die vorher hervorgehobene Folgerung aus $F(BC) = 1\,R$ machen, finden wir $F(BA_0) = B$, also $A_0(FB) = 2\,R - 2\,B$, ebenso $A_0(CE) = 2\,R - 2\,C$, also $A_0(FE) = 2\,R - (2R - 2\,B) - (2R - 2\,C) = 2\,B + 2\,C - 2R = 2R - 2\,A$. Ebenso

folgt $D(FE) = 2R - D(BF) - D(CE) = 2R - 2A$; womit der Satz ebenfalls bewiesen ist.

Auch noch andere Umformungen des Beweises sind leicht zu machen. Man kann den Kreis z. B. durch A_0DC_0 bestimmen und zeigen, daß er durch B_0 geht; man kann ihn auch durch DB_0C_0 bestimmen und zeigen, daß er durch A_0 geht u. s. f.

Geht man vom Dreieck BHC aus, so ist DEF ebenfalls das Höhenfußpunktdreieck. Nach dem bewiesenen Satze muß der Kreis durch die Mittelpunkte Q und R von BH und CH gehen. Dasselbe läßt sich jedoch auch direkt zeigen. Es ist $QF = QB$, also $Q(HF) = 2B(FH) = 2(90^0 - A)$ oder $Q(FE) = D(FE)$, so daß Q, F, E, D auf einem Kreise liegen. Fassen wir also AH, BH, CH als obere Höhenstücke auf, so finden wir, daß der angegebene Feuerbachsche Kreis auch durch die Mittelpunkte der obern Höhenstücke geht.

18. Wenn man um ein gleichseitiges Dreieck den Kreis beschreibt und einen Punkt der Peripherie mit den Ecken verbindet, so ist die eine Verbindungslinie gleich der Summe der beiden andern; die längere Verbindungslinie ist natürlich diejenige, welche eine der Seiten des Dreiecks innerhalb der Begrenzung schneidet.

Bew. Es sei (Fig. 14) ABC das Dreieck, P der beliebige Punkt auf der Peripherie des Umkreises, es fragt sich, wie die Bedingungen $BC = CA = AB$ und die, daß P auf dem Umkreise von ABC liegt, benutzt werden. Da ferner eine Länge gleich der Summe von 2 andern sein soll, so müssen wir entweder die eine der kleineren Längen um die andere verlängern oder dieselbe von der größten abschneiden; es ist dann zu beweisen daß der Rest gleich der andern Länge ist. Wir entscheiden uns für das letzte. Nehmen wir P im kleineren Bogen BC an, so muß PA die größte Länge sein. Indem wir PB auf PA bis X abschneiden, ist zu beweisen, daß $AX = PC$ ist. Die Bedingung, daß P auf dem Kreise liegt, führt uns zur Anwendung des Peripheriewinkelsatzes. Dies giebt $P(CA) = P(AB) = 60^0$; also $P(BC) = 120^0$. Verbinden wir X mit B, so finden wir im Dreieck PBX die Bedingungen $PX = PB$, $P(BX) = 60^0$, daher ist PBX gleichseitig, also $BX = BP$ und $X(PB) = 60^0$, $X(AB) = 120^0$. Dies führt uns zur Vergleichung der Dreiecke ABX und BPC. Es ist schon $AB = BC$, $BX = BP$, $X(AB) = P(BC) = 120^0$, also die Dreiecke sind kongruent, somit $AX = CP$.

Bem. 1. Die Bedingung, daß $AC = AB$ ist, haben wir scheinbar nicht benutzt, sie liegt aber als Folgerung in $BA = BC$ und $C(AB) = 60^0$.

Bem. 2. An den Satz wird man leicht die Folgerung schließen können, daß die Abstände des Mittelpunktes M des Umkreises von ABC von den Linien PA, PB, PC in dem Zusammenhange stehen, daß der eine Abstand gleich der Summe der beiden andern ist. Sind also α, β, γ die Mittelpunkte von PA, PB, PC, so ist $M\gamma = M\alpha + M\beta$. Die Punkte α, β, γ bilden nämlich die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Umkreis zum Durchmesser PM hat.

19. Die Fußpunkte der Lote, welche von 2 Ecken eines Dreiecks kreuzweise auf die Halbierungslinien ihrer Winkel gefällt werden, liegen in der der dritten Ecke entsprechenden Berührungssehne des Inkreises.

Bew. (Fig. 15). Es sei ABC das Dreieck, D, E, F die Berührungspunkte des Inkreises, O der Mittelpunkt desselben, BG, CH die Lote von B und C auf CO und BO, so daß G und H die Fußpunkte sind. Es ist zu beweisen, daß G und H auf der Geraden EF liegen. Wir kehren hier wieder Bedingung und Folgerung um, indem wir beweisen wollen, daß der Schnittpunkt G von CO mit EF die Eigenschaft, hat, daß $G(BC) = 1\,R$ ist. Daß für H dann dasselbe gilt, darf nicht noch hervorgehoben werden.

Von den Winkelhalbierungslinien wissen wir, daß sie sich in einem Punkte O schneiden, der von den Seiten gleich weit entfernt ist. Verbinden wir O mit F, so wissen wir, daß $OF \perp AB$ ist. Soll nun $G(BO) = 1\,R$ sein, so müssen also die Punkte BGFO auf einem Kreise liegen. Dies beweisen wir wie gewöhnlich durch die Gleichheit von 2 Winkeln. Als solche sind am besten solche zu wählen, die sich leicht durch Dreieckswinkel ausdrücken lassen. Daß F(BG) und O(GB) diese Eigenschaft haben, ist leicht einzusehen.

$$O(BG) = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \text{ nach dem Satz vom Außenwinkel}$$

$$F(BG) = \frac{180^0 - A}{2} = \frac{B}{2} + \frac{C}{2},$$

somit liegen BOFG auf einem Kreise, also $G(OB) = F(OB) = 1\,R$.

Eine Ausdehnung des Satzes erhält man durch die Betrachtung der Ankreise.

20. Zeichnet man über den Seiten eines Dreiecks gleichseitige Dreiecke und verbindet die Spitzen derselben mit den Gegenecken der betreffenden Grundlinien im ursprünglichen Dreieck, so schneiden sich die Verbindungslinien in einem Punkte, welcher noch die Eigenschaft hat, daß die Verbindungslinien desselben mit den Ecken gleiche Winkel von

120^0 bilden, wenn kein Winkel des Dreiecks dieſe Größe überſchreitet. Die angegebenen Verbindungslinien ſind ferner gleich lang.

Bew. (Fig. 16). Es ſei ABC das Dreieck, A', B', C' die Spitzen der gleichſeitigen Dreiecke bez. über BC, CA, AB; es ſoll dann bewieſen werden, daß ſich AA', BB', CC' in einem Punkte P' ſchneiden, ſo zwar, daß $P'(BC) = P'(CA) = P'(AB) = 120^0$ iſt, falls nicht der größte Winkel, der A ſei, größer als 120^0 iſt; ferner ſoll $AA' = BB' = CC'$ ſein. Wir bezeichnen den Schnittpunkt von BB' und CC' mit P'; es ſoll alſo AP' und P'A' oder AA' dieſelbe Gerade der Lage nach ſein. Zunächſt iſt für P' eine Folgerung zu ziehen, die wir nur erhalten können, wenn wir für B' und C' die Bedingungen aufſtellen und daraus Folgerungen ziehen. Solche ſind $A(B'C) = 60^0$, $A(C'B) = 60^0$. Eine Benutzung dieſer Ausſagen erhalten wir, indem wir den Winkel A hinzufügen; dies giebt $A(BB') = A(CC')$. Dadurch können wir eine neue Benutzung der Bedingungen $AC = AB'$, $AB = AC'$ erhalten; wir finden nämlich die Folgerung $ABB' \cong ACC'$ und daraus $BB' = CC'$, $C'(CA) = B(AB')$ oder $B(AP') = C'(AP')$, womit eine Folgerung für P' gewonnen iſt, worauf es hauptſächlich ankam. Dieſe gleichen Winkel führen uns zum Peripheriewinkelſatz, d. h. zur Folgerung, daß C'BP'A auf einem Kreiſe liegen. Dieſe Anwendung liegt um ſo näher, als wir die Gleichheit der Winkel durch Kongruenz gefunden haben, ein Wechſel in den Sätzen aber von Vorteil iſt.

Wir finden daraus $P'(AC') = B(AC') = 60^0$, $P'(C'B) = A(C'B) = 60^0$.

Ebenſo folgt natürlich $P'(AB') = 60^0$, $P'(B'C) = 60^0$. Dieſe Folgerung iſt nun zu kombinieren mit der Bedingung, daß A' die Spitze eines gleichſeitigen Dreiecks über BC iſt; wir erhalten ſofort, daß BP'CA' ein Kreisviereck iſt, alſo $P'(BA') = 60^0$, $P'(A'C) = 60^0$, alſo in der That AP'A' eine Gerade.

Man hätte auch folgendermaßen ſchließen können. Man ziehe AA', dann erhält man ein Dreieck ABA', welches C'BC kongruent iſt, alſo $A(BA') = C'(BC) = A(BP')$, alſo AA' und AP' dieſelbe Gerade.

Legt man die Spitzen der gleichſeitigen Dreiecke nach den entgegengeſetzten Flächenteilen, alſo (Fig. 16) nach A'', B'', C'', ſo läßt ſich genau wie vorher beweiſen, daß ſich AA'', BB'', CC'' in einem Punkte P'' ſchneiden, und daß $AA'' = BB'' = CC''$ iſt. Es war vorher $A(BB') = A + 60^0$, $A(CC') = A + 60^0$, jetzt iſt $A(BB'') = A(CC'') = A - 60^0$. Die andern Folgerungen laſſen ſich identiſch wiederholen. Man wird erkennen, daß der Schnittpunkt P'' in demjenigen Winkelraum liegt, deſſen Größe von den andern in Bezug auf 60^0 verſchieden iſt. Iſt $A > B > 60^0 > C$, ſo liegt P'' im Winkelraum von C; iſt $A > 60^0 >$

$B > C$, dann im Winkelraum A, also entweder im Raume des größten oder des kleinsten Winkels.

21. Folgerungen aus dem Satze Nr. 20.

Kombiniert man das gefundene Resultat mit Nr. 18, so findet man $AP' + BP' + CP' = AA' = BB' = CC'$. Für den Punkt P'' erhält man, falls $A > B > 60^0 > C$ ist, $-P''A - P''B + P''C = AA'' = BB'' = CC''$. Ist $A > 60^0 > B > C$, so ist $-P''A + P''B + P''C = AA'' = BB'' = CC''$.

Die Analogie ergiebt sofort den Beweis.

Man findet ferner $A''B'C \cong A'B''C \cong ABC$; ebenso sind alle Dreiecke, die man aus jenen durch cyklische Vertauschung der Buchstaben erhält, denselben kongruent; z. B. $B''C'A$ 2c. Es ist also $AB'A''C'$ ein Parallelogramm, daher der Mittelpunkt von $B'C'$ auch der von AA'' u. s. f. Die Dreiecke ABC und $AA'A''$ haben nun die Schwerlinie AA_0, also auch den Schwerpunkt S gemein. Daher geht $A'S$ durch den Mittelpunkt von AA' und diese Schwerlinie des Dreiecks $AA'A''$ wird in S nach dem Verhältnis 2 : 1 geteilt. Der Mittelpunkt von AA'' ist auch der von $B'C'$, also ist die genannte Gerade auch Schwerlinie in $A'B'C'$, daher S auch Schwerpunkt in $A'B'C'$. Ebenso ist zu zeigen, daß auch $A''B''C''$ denselben Schwerpunkt hat.

Es ist vorher gezeigt, daß P' auf den Umkreisen der 3 Dreiecke BCA', CAB', ABC' liegt. Dies führt noch zu einer andern merkwürdigen Folgerung. Sind nämlich J_a, J_b, J_c die Mittelpunkte der Dreiecke BCA', CAB', ABC' und deren Umkreise, so folgt $J_cA = J_cP'$, $J_bA = J_bP'$, also $J_bJ_c \perp AP'$, ebenso $J_cJ_a \perp BP'$, $J_aJ_b \perp CP'$. Da AP', BP', CP' Winkel von 120° bilden, so bilden also die Linien J_cJ_b, J_bJ_a, J_cJ_a Winkel von 60°, d. h. sie bilden ein gleichseitiges Dreieck; ebenso die Mittelpunkte K_a, K_b, K_c der Umkreise von BCA'', CAB'', ABC''.

22. Trägt man an die Höhen eines Dreiecks in den Ecken desselben immer gleiche Winkel an, so entsteht durch die neuen Schenkel der Winkel ein Dreieck, das dieselben Winkel hat wie das ursprüngliche Dreieck, und dessen Mittelpunkt des Umkreises der Höhenschnittpunkt des ursprünglichen Dreiecks ist.

Bew. Es ist selbstverständlich, daß das Antragen der Winkel nach einer bestimmten Ordnung vor sich gehen muß. Um diese zu erkennen, nehmen wir ein spitzwinkliges Dreieck (Fig. 17) ABC an. Wir wollen dann den Winkel φ immer so antragen, daß von der Höhe gerechnet der zweite Schenkel nach links liegt. Ist dann $A'B'C'$ das abgeleitete Dreieck, so geht $B'C'$ durch A, $C'A'$ durch B, $A'B'$ durch C. Als

erste Folgerung ergiebt sich dann, daß die entsprechenden Seiten des ursprünglichen und abgeleiteten Dreiecks denselben Winkel bilden, also $(BC, B'C') = (CA, C'A') = (AB, A'B') = 90^0 - \varphi$. Betrachten wir den Außenwinkel des Dreiecks A'BC bei der Ecke B, so ist $\varphi + 90^0 - C = A' + \varphi - (90^0 - B)$ oder $A' = 90^0 - C + 90^0 - B = A$. Wir erhalten also sofort durch die Benutzung der Bedingung die eine Eigenschaft, die wir als neue Bedingung benutzen müssen. Daß wir ferner eine Eigenschaft des Höhenschnittpunktes H benutzen müssen, ist ebenfalls klar. Nun ist $H(AB) = 180^0 - C$, also BHAC' ein Kreisviereck, und $C'(BH) = A(BH)$. Da A'BHC ebenfalls ein Kreisviereck ist, so folgt $A'(BH) = C(BH)$. Es ist aber $A(BH) = C(BH) = 90^0 - B$, also $C'(BH) = A'(BH)$, folglich $HA' = HC'$. Ebenso ist zu beweisen $HA' = HB'$.

Wir benutzen hier die Eigenschaften des Höhenschnittpunktes durch $H(AB) = 180^0 - C$ ꝛc. und $A(BH) = C(BH)$.

B. Zweite Stufe.

Untersuchung zusammenhängender Eigenschaften des Dreiecks in Bezug auf die Berührungskreise desselben. Anwendung von Proportionen. Sätze über Flächen. Längen werden gelegentlich mit Zeichen versehen.

23. Vorbemerkung. Viele der hier angegebenen Eigenschaften des Dreiecks lassen sich mittelst der frühern Hilfsmittel beweisen. Weil sie aber gewisse Erweiterungen von elementaren Eigenschaften geben und zugleich mit weitergehenden Eigenschaften des Dreiecks in Zusammenhang stehen, dürfte ihr Platz hier angebracht sein. — Obwohl die Hilfsmittel der neuern Geometrie hier noch nicht angewendet werden sollen, wird die Einführung der Zeichen gelegentlich von Vorteil sein.

Um unnötige Wiederholungen zu vermeiden, soll beim Dreieck eine bestimmte Bezeichnung festgehalten werden, falls nicht besondere Gründe eine andere Bezeichnung rechtfertigen.

Das Dreieck heißt ABC, wobei für die Seiten BC, CA, AB bez. die Bezeichnung a, b, c eintritt, die Winkel werden mit α, β, γ bezeichnet. Der Mittelpunkt des Umkreises ist M, der Mittelpunkt des Inkreises O, die Mittelpunkte der Ankreise sind O', O'', O''', der Schwerpunkt S, der Höhenschnittpunkt H. Der Radius des Umkreises heiße r; der Radius des Inkreises ρ; die Radien der Ankreise ρ', ρ'', ρ'''; die Summe aller Seiten $a + b + c$ sei mit $2p$ bezeichnet, der Inhalt des

Dreiecks mit $\triangle$, die Höhen seien h', h'', h''', die Schwerlinien t', t'', t''', w_α, w_β, w_γ seien die Halbierungslinien der innern Winkel, v_α, v_β, v_γ die der äußern. Fällt man von einem Punkte P das Lot auf Seite a, so soll der Fußpunkt P_a heißen, entsprechende Bedeutung haben P_b, P_c; es ist also O_a der Berührungspunkt des Inkreises mit Seite a. Zieht man durch einen Punkt P die Ecktransversale durch A, so schneidet diese die Gegenseite in P_α ꝛc., so daß O_α der Punkt ist, in welchem die Halbierungslinie des Winkels α die Seite a trifft.

Auf andere allgemeine Bezeichnungen wird gelegentlich eingegangen.

Der Beweis beruht in vielen Fällen darauf, daß man die vorkommenden Größen durch die Elemente des Dreiecks, d. h. die Winkel, die Seiten, den Inhalt u. s. f. ausdrückt. Durch Berechnung der Größen und ihre Vergleichung erhält man die Sätze.

24. Summe und Differenz bestimmter Größen sind an sich wichtig, die Betrachtung derselben führt zu manchen wichtigen Eigenschaften des Dreiecks. Betrachten wir zunächst eine beliebige Kombination der Winkel, so sehen wir, daß die Summe von 2 Winkeln zum dritten führt, denn es ist $\beta + \gamma = 180^0 - \alpha$, ferner $\beta + \gamma - \alpha = 180^0 - 2\,\alpha$. Die Kombination von 3 Winkeln führt also zum doppelten Dreieckswinkel. Von besonderer Bedeutung ist deshalb nur die Differenz von 2 Dreieckswinkeln.

Anders ist es mit den Seiten. Einfache Kombinationen sind

$$b + c,\ b - c,\ a + b + c = 2\,p,\ b + c - a = 2\,(p - a),$$

wobei wir diejenigen auslassen, welche aus dieser durch cyklische Vertauschung entstehen.

25. Der Winkel zwischen Höhe und Winkelhalbierungslinie ist gleich der halben Differenz der Winkel an der Gegenseite $(h', w_\alpha) = \frac{\beta - \gamma}{2}$.

Bew. (Fig. 18). Es ist $A(BH_a) = 90^0 - \beta$, $A(BO_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$, also $A(H_aO_\alpha) = \frac{\alpha}{2} - (90^0 - \beta)$, wenn $B > C$ ist; oder $A(H_aO_\alpha) = \frac{\alpha}{2} + \beta - 90^0$. Um dieses besser auszudrücken, führen wir die Bedingung ein, daß die Summe der Winkel 180^0 beträgt. Dies giebt $A(H_aO_\alpha) = \frac{\alpha}{2} + \beta - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$.

26. Der Winkel zwischen Halbierungslinie und Durchmesser des Umkreises an einer Ecke ist gleich der halben Differenz der Winkel an der Gegenseite.

Bew. (Fig. 18). Es kommt hier vor allen Dingen darauf an, die Bedingung für den Mittelpunkt M einzuführen. Dies geschieht durch $M(AC) = 2\beta$, also $A(MC) = 90^0 - \beta = A(BH_a)$. Hieraus folgt der Satz mittelst Nr. 25.

Wir können auch AM bis zum Umkreise in N verlängern, und erhalten die Folgerung daß $NB \perp AB$, und $B(NC) = A(NC)$ ist, wodurch die Bedingungen für M ebenfalls eingeführt werden. Weil $NB \perp AB$, $BC \perp AH_a$, so bilden NB und BC denselben Winkel wie AB und AH_a, also es ist

$$A(BH_a) = B(NC) = A(NC).$$

27. Die Tangente an dem Umkreise in einer Ecke eines Dreiecks bildet mit der Gegenseite einen Winkel gleich der Differenz der Winkel an dieser Gegenseite. Denselben Winkel bildet mit dieser Seite die Verbindungslinie der Höhenfußpunkte, die zu den Endpunkten der Seite gehören.

Bew. (Fig. 18). Neben der alten Bezeichnung führen wir noch die Tangente AF ein, wo F der Schnittpunkt mit BC ist. Die Bedingung für AF führt sofort zur Folgerung $A(BF) = C(AB) = \gamma$. Der Außenwinkelsatz führt dann zu $F(AB) = \beta - \gamma$.

Nach dem Satze vom Peripheriewinkel ist ferner

$$H_c(AH_b) = \gamma, \text{ also } H_bH_c \parallel AF.$$

Bem. Die Differenz der Winkel kann natürlich noch vielfach anders vorkommen. Schlägt man z. B. mit AB von A den Kreis, welcher BC in K, AC in L schneidet, so ist $A(KC) = \beta - \gamma$, $B(LC) = \frac{\beta - \gamma}{2}$, doch ist dies für unsere Ziele unwesentlich.

28. Sätze über die Kombinationen von Seiten des Dreiecks, die sich an die Berührungskreise schließen.

Wir wollen bei der Tafel, die wir aufstellen, die Bedingung $a > b > c$ festhalten und alle Strecken in der Richtung AB, BC, CA als positiv, die Strecken in entgegengesetzter Richtung negativ nehmen. Dann ist (Fig. 19):

α) $AO_c = p - a$, $AO_c' = p$, $AO_c'' = c - p$, $AO_c''' = p - b$,
$AO_b = a - p$, $AO_b' = -p$, $AO_b'' = c - p$, $AO_b''' = p - b$,
$BO_a = p - b$, $BO_a' = p - c$, $BO_a'' = p$, $BO_a''' = a - p$,
$BO_c = b - p$, $BO_c' = p - c$, $BO_c'' = -p$, $BO_c''' = a - p$,
$CO_b = p - c$, $CO_b' = b - p$, $CO_b'' = p - a$, $CO_b''' = p$,
$CO_a = c - p$, $CO_a' = b - p$, $CO_a'' = p - a$, $CO_a''' = -p$.

Diese Relationen beweisen wir, indem wir den Satz benutzen, daß die Stücke von den Ecken bis zu den Berührungspunkten einander gleich sein müssen. Diese Bedingungen reichen vollständig aus, um die Stücke zu bestimmen.

Setzen wir nämlich $O_bA = AO_c = x$, $O_cB = BO_a = y$, $O_aC = CO_b = z$, so ist $y + z = a$, $z + x = b$, $x + y = c$, also
$2(x + y + z) = a + b + c = 2p$, $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$.

Für die Berührungspunkte von O' setzen wir ebenso
$BO_c' = BO_a' = y'$, $O_a'C = O_b'C = z'$, $O_b'A = AO_c' = x'$, also
$$y' + z' = a,\ x' - z' = b,\ x' - y' = c,$$
$$x' = p,\ y' = p - c,\ z' = p - b \text{ ꝛc.}$$

Weitere Folgerungen sind noch:
$$O_aO_a' = b - c,\ O_bO_b'' = c - a,\ O_cO_c''' = a - b, \text{ also}$$
$$O_aO_a' + O_bO_b'' + O_cO_c''' = 0.$$

Ferner $BO_a = O_a'C$, $O_a'''B = CO_a''$ ꝛc,
so daß der Mittelpunkt von BC auch der von O_aO_a' und $O_a''O_a'''$ ist.
$O_a'''B = p - a$, $BO_a'' = p$, also $O_a'''O_a'' = 2p - a = b + c$,
ebenso natürlich $O_b'O_b''' = c + a$, $O_c''O_c' = a + b$, also
$$O_a'''O_a'' + O_b'O_b''' + O_c''O_c' = 4p.$$
Es ist auch $O_a'''B = p - a$, $BO_a = p - b$, also $O_a'''O_a = 2p - a - b = c$,
ebenso $O_a'O_a'' = c$, also $O_b'O_b = O_b''O_b''' = a$,
$$O_a'''O_a' = O_aO_a'' = b.$$

Wir erhalten somit auf jeder Seite, wenn wir die Ecken und die Berührungspunkte der Berührungskreise als Endpunkte nehmen, fast alle Kombinationen der Seiten:
$BC = a$, $O_a'''O_a' = O_aO_a'' = b$, $O_a'''O_a = O_a'O_a'' = c$,
$O_a'''O_a'' = b + c$, $O_aO_a' = b - c$,
$BO_a'' = O_a'''C = p$, $O_a'''B = CO_a'' = p - a$,
$BO_a = O_a'C = p - b$, $BO_a' = O_aC = p - c$.

29. Wenn man in einem Dreieck die Halbierungslinie eines Winkels bis zum Umkreise verlängert, so ist der Schnittpunkt von den Endpunkten der Gegenseite ebensoweit entfernt als vom Mittelpunkt des Inkreises und vom Mittelpunkt des der Gegenseite angehörigen Ankreises.

Bew. (Fig. 19.) Außer der alten Bezeichnung ist noch der Schnittpunkt der Halbierungslinie AO des Winkels α mit dem Umkreise einzuführen; wir bezeichnen ihn mit A_k. Es ist also zu beweisen:
$$A_kO = A_kO' = A_kB = A_kC.$$

Die Bedingungen, welche O bestimmen, sind die, daß er auf 2, also auf allen 3 Winkelhalbierungslinien liegt. Wir werden also etwa $A(BO) = A(OC)$, $B(AO) = B(OC)$ benutzen. A_k wird durch $A(BA_k) = A(A_kC)$ und durch die Lage auf dem Kreise bestimmt. Diese letzte Bedingung giebt $B(A_kC) = A(A_kC)$. Da $A(A_kC)$ auch $A(OC)$ ist, so haben wir 2 Aussagen für den Winkel, dadurch finden wir $A(OB) = B(A_kC)$. Soll nun $A_kO = A_kB$ sein, so müssen wir

$B(OA_k) = O(BA_k)$ zu erweisen suchen. $B(A_kC)$ ist ein Teil von $B(A_kO)$. Es liegt daher nahe, den andern Teil $B(A_kO)$ in Betracht zu ziehen, dies ist $B(CO)$; es ist nun $B(CO) = B(OA)$, daher noch festzustellen, daß $B(OA) + A(OB) = O(BA_k)$ ist; dies folgt aber aus dem Satze vom Außenwinkel, dessen schnelle Erkenntnis von Wichtigkeit ist.

Um zu beweisen, daß $A_kO' = A_kB = A_kO$ ist, schließt man den Satz an den vorigen an; $B(A_kO')$ ergänzt $B(OA_k)$ zu einem Rechten, ebenso $O'(BA_k)$ den Winkel $O(A_kB)$, daher $B(A_kO') = O'(A_kB)$, und $A_kB = A_kO'$. Man kann indessen auch vollständig analog dem vorigem Satze verfahren. Vorher war:

$$B(OA_k) = B(OC) + B(CA_k) = B(OA) + A(CA_k) = B(OA) + A(BO) = O(BA_k);$$

hier ist:

$$B(O'A_k) = B(O'C) - B(CA_k) = B(O'O_c') - A(CA_k) = B(O'O_c') - A(BO') = O'(BA_k).$$

Die Ausdehnung dieses Satzes auf die entsprechenden Schnittpunkte der äußern Winkelhalbierungslinien ist sehr einfach. Schneidet die Halbierungslinie des Außenwinkels in A den Umkreis in A_k', so ist $A_k'O'' = A_k'C = A_k'B = A_k'O'''$.

Man sucht hier die Dreieckswinkel einzuführen, z. B. $B(O'''A_k') = O'''(BA_k') = \frac{\beta+\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$.

Die Analogie läßt leicht den rechten Weg finden.

Bem. Daß aus diesem Satze noch folgt $BO_a = O_a'C$, $O_a'''B = CO_a''$ ꝛc., was in Nr. 28 bewiesen ist, sieht man leicht ein.

30. In jedem Dreieck ist $\rho' + \rho'' + \rho''' - \rho = 4r$.

Bew. (Fig. 19). Zunächst sieht man wohl leicht ein, daß man das Polynom von 4 Gliedern in 2 Binome wird zerlegen müssen, also etwa in $\rho' + \rho''$ und $\rho''' - \rho$ oder, wenn wir die Seite a bevorzugen, in $\rho' - \rho$ und $\rho'' + \rho'''$. Sätze, in denen solche Summen vorkommen, erhalten wir in den Sätzen vom Trapez. Es fragt sich also, ob wir Trapeze erhalten können, einmal mit den Seiten ρ und ρ' und dann mit den Seiten ρ'' und ρ'''. Solche Trapeze sind $O_aOO'O_a'$ und $O_a'''O'''O''O_a''$. Im ersten sind O_aO und $O_a'O'$ die parallelen Seiten, die nicht parallelen OO' und O_aO_a', so daß es ein übergeschlagenes Trapez ist. Fragen wir nun, welches die Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten sind, so sind es A_k und M_a (Nr. 29). Dies führt sofort zur Relation $\rho' - \rho = 2\,A_kM_a$.

Das Trapez $O_a'''O'''O''O_a''$ führt dann, da A_k' der Mittelpunkt von $O'''O''$ ist, zur Relation:

$$\rho'' + \rho''' = 2\,M_aA_k', \text{ durch Addition folgt:}$$
$$\rho' + \rho'' + \rho''' - \rho = 2\,(A_kM_a + M_aA_k') = 2\,A_kA_k' = 4\,r.$$

Bew. 2. Da eine Gleichung zwischen Größen vorliegt, so ist die Frage, ob man das Resultat nicht durch eine einfache Rechnung ableiten kann. Dazu sollen einige Hilfssätze erst angegeben werden.

Hilfssatz 1. $\rho p = \rho'(p-a) = \rho''(p-b) = \rho'''(p-c) = \Delta.$

„ 2. $abc = 4r\Delta.$

„ 3. $\Delta^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$

Auf die Beweise dieser Sätze soll nicht weiter eingegangen werden, da sie zu den Fundamentalsätzen zu rechnen sind.

Um nun den Satz zu beweisen, suchen wir die vorkommenden Größen durch die Seiten, bez. durch Hilfsgrößen, zu denen besonders Δ und r gehört, auszudrücken. Da $\rho = \frac{\Delta}{p}$, $\rho' = \frac{\Delta}{p-a}$, $r = \frac{abc}{4\Delta}$ ist, so wäre also zu zeigen

$$\Delta\left\{\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p}\right\} = \frac{abc}{\Delta}$$

$$\text{oder } \Delta^2\left\{\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p}\right\} = abc \text{ oder}$$

$$p(p-b)(p-c) + p(p-c)(p-a) + p(p-a)(p-b) - (p-a)(p-b)(p-c) = abc.$$

Dies folgt aber durch eine einfache Ausführung der Rechnung, wobei nur gelegentlich $a+b+c = 2p$ gesetzt werden muß.

31. $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} + \frac{1}{\rho'''} = \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''}$,

$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''} - \frac{1}{h'}$, u. s. f.

$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} + \frac{1}{\rho'''}$ folgt einfach durch Einsetzen der Werte durch Δ und die Größen p, da $p = p-a+p-b+p-c$ ist.

Zerlegt man p in $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$, so hat man:

$$\frac{p}{\Delta} = \frac{a}{2\Delta} + \frac{b}{2\Delta} + \frac{c}{2\Delta}, \text{ d. h.}$$
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''}.$$

$$p - a = \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{a}{2}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{b}{2\triangle} + \frac{c}{2\triangle} - \frac{a}{2\triangle} = \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''} - \frac{1}{h'}.$$

Leicht noch $\frac{2}{h'} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho''} + \frac{1}{\rho'''}$.

32. In jedem Dreieck ist $MM_a + MM_b + MM_c = r + \rho$.

Bew. (Fig. 20). Wir betrachten zunächst ein spitzwinkliges Dreieck. Hier verlängern wir MM_c um MM_b bis Q, dann ist also zu beweisen $M_cQ = r + \rho - MM_a$. Auf der linken Seite haben wir eine einfache Länge; wir werden also auch die rechte Seite zu einer einfachen Länge zusammenlegen. Auf dem Radius, der durch M_a geht, haben wir schon die Länge $r - MM_a$, so daß wir diesen Radius zur Konstruktion benutzen. Um nun diese Länge A_kM_a um ρ zu verlängern, ist nur von O das Lot auf den Radius zu fällen. Trifft dieses Lot den Radius in Q', so ist also $Q'A_k = r + \rho - MM_a$.

Es ist also noch zu beweisen: $M_cQ = A_kQ'$.

Aus der Bedingung $MQ = MM_b$ ist zunächst eine Folgerung zu ziehen; die einfachste ist offenbar, daß die Sehnen, welche durch M_b und Q gehen und senkrecht zu MM_b und MQ stehen, einander gleich sind; demnach ist die Sehne, welche senkrecht zu MQ ist, eine Hilfslinie. Schneidet dieselbe den Kreis in U und Q'', so ist $UQ'' = AC$; daraus folgt notwendig $AU \parallel Q''C$ und $LC = LQ''$, wenn L der Schnittpunkt von UQ'' und AC ist; endlich auch $AL = UL$; also da Q und M_b die Mittelpunkte von UQ'' und AC sind, auch $LM_b = LQ$, folglich $M_bQ \parallel CQ'' \parallel AU$. Es ist nun $M(M_bQ) = \alpha$, also $M_b(MQ) = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$, $M_b(CQ) = \frac{\alpha}{2}$, also M_bQ parallel der Halbierungslinie des Winkels α oder parallel zu AA_k; da auch AU parallel dieser Linie ist, so ist U der Punkt A_k. Die Geraden M_cQ und A_kQ' stoßen nicht aneinander, sind auch nicht parallel; wir werden daher untersuchen, ob sie nicht in Dreiecken liegen, deren Kongruenz wir beweisen können. Da M_cQ in keinem hier gezeichneten Dreieck liegt, so werden wir eine Parallelverschiebung vornehmen. Dies geschieht etwa, indem wir von B das Lot auf A_kQ fällen, wodurch wir BQ''' erhalten. Da nun schon bekannt ist, daß $A_kB = A_kO$ ist so sind die Dreiecke A_kBQ''' und A_kOQ' zu untersuchen, welche rechtwinklig sind und in der Hypotenuse schon übereinstimmen.

Man findet leicht $B(A_kQ''') = \beta + \frac{\alpha}{2} - 90^0 = \frac{\beta - \gamma}{2}$, ebenso

auch $A_k(OQ') = \frac{\beta - \gamma}{2}$ (Nr. 25 u. 26), also sind die Dreiecke kongruent und der Satz erwiesen.

Bem. 1. Ist $\alpha > 90^0$, so findet man ebenso $MM_b + MM_c - MM_a = r + \rho$. Sieht man aber MM_a hier als negativ an, da es in dem andern Flächenteil der Ebene als das Dreieck liegt, so würde man den Satz auch hier so aussprechen können $MM_a + MM_b + MM_c = r + \rho$.

Bem. 2. Der Satz läßt sich folgendermaßen ausdehnen:

$$\rho' - r = MM_b + MM_c - MM_a,$$
$$\rho'' - r = MM_a + MM_c - MM_b,$$
$$\rho''' - r = MM_a + MM_b - MM_c;$$

wobei die vorher angegebene Zeichenregel gilt. Nimmt man dazu noch:

$$-\rho - r = -MM_a - MM_b - MM_c,$$

so folgt durch Addition:

$$\rho' + \rho'' + \rho''' - \rho - 4r = 0.$$

33. Bezeichnet man den Abstand des Mittelpunktes des Inkreises vom Mittelpunkte des Umkreises mit d, so gilt die Relation $d^2 = r^2 - 2r\rho$.

Bew. Fig. 20. Da eine Größenbeziehung festgestellt werden soll, so empfiehlt es sich, die Lage von M und O von Größen abhängig zu machen. Eine Bedingung für M ist, daß es in dem Lote liegt, welches im Mittelpunkt einer Seite errichtet wird, doch wird M dadurch nicht bestimmt, eine nähere Bestimmung erhalten wir schon, wenn wir den ganzen Durchmesser A_kA_k' ziehen; dann ist es aber natürlich nötig, O mit diesen Punkten in Beziehung zu setzen. Eine Bedingung für O ist, daß er auf AA_k liegt, eine andere, daß $A_kO = A_kB$ ist, wodurch O bestimmt wird. Durch die angegebenen Größen bez. durch die Seiten des Dreiecks ist dann der Abstand auszudrücken. Wir werden aber auch fragen, ob die angegebene Relation nicht Umformungen annehmen kann. Solche sind noch:

$$r^2 - d^2 = 2r\rho, \quad r^2 = d^2 + 2r\rho.$$

Denkt man sich $2r\rho$ in ein Quadrat verwandelt, dessen Seite x sei, so hätte man zu zeigen, daß r, d, x ein rechtwinkliges Dreieck ist. Dies hat insofern seine Schwierigkeit, als die Verwandlung von $2r\rho$ in x^2 sich nicht gut an die Figur anschließt. Betrachten wir die andere Umformung, so ist $r^2 - d^2 = (r + d)(r - d)$. Diese Größen $r + d$ und $r - d$ werden leicht in der Figur erhalten, wenn wir M mit O verbinden. Schneidet MO den Kreis in N und R, so ist $ON = r - d$, $OR = r + d$; daher $ON \cdot NR = r^2 - d^2$. Es ist nun die Frage, ob wir $NO \cdot OR$ umformen können. Eine solche ist durch den Satz von der Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis gegeben. Es ist

$ON \cdot NR = AO \cdot OA_k$; es ist also noch zu beweisen: $AO \cdot OA_k = 2r\rho = \rho \cdot A_kA_k'$; denn man wird die Einführung von A_kA_k' nach dem vorher Gesagten berechtigt finden. Die Gleichung $AO \cdot OA_k = \rho \cdot A_kA_k'$ wird natürlich in eine Proportion verwandelt, wie dies bei solchen Gleichungen meistens sein wird. Dies giebt entweder $\frac{AO}{\rho} = \frac{A_kA_k'}{OA_k}$ oder $\frac{AO}{A_kA_k'} = \frac{\rho}{OA_k}$.

Diese Relationen führen zum Dreieck AOO_o, in welchem AO und ρ vorkommen. Es ist die Frage, ob ein Dreieck mit A_kA_k' und OA_k vorkommt; ein solches ist $A_kA_k'O$, doch ist dasselbe nicht rechtwinklig, wie AOO_o. Nun aber ist $A_kB = A_kO$, also können wir auch das Dreieck $A_kA_k'B$ betrachten, das in der That rechtwinklig ist. Da auch $A(O_oO) = A(BA_k)$ ist, so sind die Dreiecke AOO_o und $AA_k'B_k$ ähnlich, womit der Satz bewiesen ist.

Bem. Wie sehen hier, daß die Relation $A_kB = A_kO$ für den Beweis von besonderer Bedeutung ist; es ist aber auch die Eigenschaft, durch welche O hier bestimmt wird.

Bew. 2. Ein anderer Beweis wird erhalten, wenn wir die vorher gegebenen Größen und zugleich die Seiten des Dreiecks einführen. Wir fällen zu dem Ende noch von O das Lot OQ' auf A_kA_k', damit wir auf dieser Länge die Stücke erhalten. Es ist dann:

$$d^2 = OQ'^2 + Q'M^2 = \overline{OA_k}^2 - Q'A_k^2 + Q'M^2 = A_kB^2 - Q'A_k^2 + Q'M^2$$
$$= BM_a^2 + A_kM_a^2 - Q'A_k^2 + Q'M^2 = BM_a^2 + (r - MM_a)^2 - (r + MQ')^2 + Q'M^2$$
$$= BM_a^2 + MM_a^2 + r^2 - 2r \cdot MM_a - r^2 - 2r \cdot MQ'$$
$$= r^2 - 2r(MM_a + MQ') = r^2 - 2r\rho.$$

Bem. Dieser Satz hat natürlich eine Ausdehnung, die sich auf die Entfernung des Punktes M von den Mittelpunkten der andern Berührungskreise bezieht. Ist $MO' = d'$, $MO'' = d''$, $MO''' = d'''$, so ist

$$d'^2 = r^2 + 2r\rho', \quad d''^2 = r^2 + 2r\rho'', \quad d'''^2 = r^2 + 2r\rho''',$$

also $d^2 + d'^2 + d''^2 + d'''^2 = 4r^2 + 2r(\rho' + \rho'' + \rho''' - \rho) = 12r^2$.

34. Folgerung. Wir fanden vorher die merkwürdige Eigenschaft, daß der Abstand d nur von den 2 Elementen r und ρ abhängig ist. Ist also r und ρ gegeben, so ist damit die Entfernung des Mittelpunktes O von M gegeben, man kann also den Punkt O feststellen, da bei einer Bewegung von O auf dem Kreise mit d das ganze Dreieck sich gleichmäßig weiter bewegen könnte. Das Dreieck wird aber erst durch 3 Elemente bestimmt; man kann also eine Seite willkürlich nehmen, so daß sie den Inkreis berührt. Zeichnet man dann von den Endpunkten der Sehne die Tangenten an den Inkreis, so müssen sich dieselben daher auf dem Umkreise von M schneiden. Dies giebt den Satz: Hat man

2 Kreise von solcher Beschaffenheit, daß es ein Dreieck giebt, welches dem einen Kreise inbeschrieben, dem andern umbeschrieben ist, so giebt es unendlich viele solcher Dreiecke.

Der Satz gilt natürlich auch für die äußern Berührungskreise.

35.
$$4t'^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$
$$4t''^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2,$$
$$4t'''^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2,$$
$$\text{also } 4(t'^2 + t''^2 + t'''^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Bew. (Fig. 21). Wir nehmen der Einfachheit halber keine Indices, setzen im Dreieck ABC die Schwerlinie AD = t und bezeichnen den Höhenfußpunkt mit G, dann ist:

$$t^2 = AD^2 = AG^2 + GD^2 = AB^2 - BG^2 + GD^2.$$

Wir werden hier alles soviel als möglich durch die Seiten ausdrücken; es ist also

$$t^2 = c^2 - BG^2 + GD^2, \text{ ebenso}$$
$$t^2 = b^2 - CG^2 + GD^2, \text{ also der Symmetrie halber}$$
$$2t^2 = b^2 + c^2 - (BG^2 + CG^2) + 2GD^2.$$

Um die Bedingung einzuführen, daß D der Mittelpunkt von BC ist, dürfen wir nur setzen $GD = \frac{CG - BG}{2}$, also ist $2t^2 = b^2 + c^2 -$

$$(BG^2 + CG^2) + \frac{2(CG - BG)^2}{4} = b^2 + c^2 - \frac{(BG + CG)^2}{2}$$
$$= b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}.$$

Bem. Einen sehr einfachen Beweis erhält man, wenn man an das Parallelogramm anknüpft.

36. In jedem Viereck ist das vierfache Quadrat der Verbindungslinie der Mittelpunkte von 2 Gegenseiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen plus der Summe der Quadrate der andern Gegenseiten weniger der Summe der Quadrate dieser Gegenseiten selbst.

Bew. (Fig. 22). Es sei ABCD das Viereck, E, F, G, H die Mittelpunkte von AB, BC, CD, DA. Die Bedingungen sind hier einfach; wir haben also zu fragen, welcher Satz ist wohl anzuwenden? Man wird hier bald erkennen, daß der in Nr. 35 angegebene Schwerliniensatz anzuwenden ist, der ja die Mittelpunkte von Seiten in Betracht zieht. Ziehen wir z. B. AG und BG, so ist EG, die Verbindungslinie der Mittelpunkte von 2 Gegenseiten, die Schwerlinie im Dreieck ABG. Daher ist:

$$4 \cdot \overline{EG}^2 = 2AG^2 + 2BG^2 - AB^2;$$

es sind aber AG und BG auch Schwerlinien, also

$$4AG^2 = 2AC^2 + 2AD^2 - CD^2,$$
$$4BG^2 = 2BD^2 + 2BC^2 - CD^2, \text{ also}$$
$$2AG^2 + 2BG^2 = AC^2 + BD^2 + AD^2 + BC^2 - CD^2, \text{ somit}$$
$$4EG^2 = AC^2 + BD^2 + AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2.$$

Ebenso natürlich:

$$4FH^2 = AC^2 + BD^2 + AB^2 + CD^2 - AD^2 - BC^2.$$

Sind J und K die Mittelpunkte von BD und AC, so läßt sich ebenso ableiten:

$$4JK^2 = AB^2 + CD^2 + BC^2 + AD^2 - AC^2 - BD^2.$$

In diesen Gleichungen zusammen treten die Verbindungslinien der Punkte A, B, C, D ganz gleichmäßig auf. Die Addition der 3 Gleichungen giebt dann:

$$4(EG^2 + FH^2 + JK^2) = AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2.$$

37. In jedem Kreisviereck ist das Quadrat der Verbindungslinie der Schnittpunkte der Gegenseiten gleich der Summe der Quadrate der Tangenten an den Endpunkten.

Bew. (Fig. 23). Das Kreisviereck sei ABCD, AB und CD mögen sich in E, AD und BC in F schneiden. Sind dann EG und FH die Tangenten an den Kreis, so soll die Relation stattfinden:

$$EF^2 = EG^2 + FH^2,$$
$$\text{oder auch } EF^2 = EC \cdot ED + FC \cdot FB.$$

Da ein Quadrat gleich der Summe von 2 Quadraten oder überhaupt von 2 Flächenstücken ist, so werden wir das Quadrat in 2 Teile zerlegen, von denen der eine den Wert $FC \cdot FB$ hat; dann ist nachzuweisen, daß der andere Teil den Wert $EC \cdot ED$ hat. $FC \cdot FB$ ist die Potenz des Punktes F in Bezug auf den Kreis, jeder durch BC gelegte Kreis giebt für F dieselbe Potenz; legen wir also durch BCE den Kreis, der FE in X schneide, so ist $FC \cdot FB = FX \cdot FE$. Dies führt zur Zerlegung von FE^2 in $FE \cdot FX$ und $EF \cdot EX$. Der Satz ist also bewiesen, wenn $EF \cdot EX = EC \cdot ED$ ist. Um dies festzustellen, müssen wir vom Punkt x eine Folgerung ziehen, die aus seiner Bestimmung folgt. Eine solche ist $X(CF) = B(CE)$. Da $B(CE)$ ein Peripheriewinkel im Grundkreise ist, so finden wir $B(CE) = D(CA)$, also ist $X(CF) = D(CA)$ oder auch $X(CF) + D(CF) = 180^0$, woraus folgt, daß DCXF ein Kreisviereck ist. Hieraus folgt die zu erweisende Relation $EF \cdot EX = EC \cdot ED$.

Bew. Der Satz kann auch so ausgesprochen werden:

Bei einem Kreisviereck ist das Quadrat der äußern Diagonale gleich der Summe der Potenzen der Endpunkte. Man sieht hier das Viereck als sogenanntes vollständiges Viereck an, in welchem sämtliche 6 Verbindungslinien der Ecken als Seiten, die Schnittpunkte der Seitenpaare

als Diagonalpunkte betrachtet werden, deren es somit 3 giebt. Diagonalen, deren es also auch 3 giebt, sind die Verbindungslinien der Diagonalpunkte. In dieser Form erhält man alsdann leicht die Ausdehnung des Satzes. Bezeichnen wir die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis, indem wir an den Punkt den Index p setzen, so würde der Satz lauten:

$$EF^2 = E_p + F_p.$$

Ist dann J der dritte Diagonalpunkt, so würde zu untersuchen sein:

$$JE^2 = J_p + E_p,\ JF^2 = J_p + F_p.$$

Wir legen zu dem Ende den Kreis um BCJ, welcher FJ in Y schneide, welcher Punkt im allgemeinen auf FJ hinter J liegen wird. Dann ist $Y(BJ) = C(JF) = D(JF)$, da deren Nebenwinkel auf dem Bogen AB stehen. Machen wir nun statt $Y(BJ) = D(JF)$ die Aussage $Y(BF) = D(BF)$, so finden wir, daß F, D, Y, B auf einem Kreise liegen, also ist $JY \cdot JF = JD \cdot JB = J_p$; $FJ^2 = FY \cdot FJ - JY \cdot FJ = F_p + J_p$, da J_p als negativ anzusehen ist. Ebenso ist natürlich zu beweisen $JE^2 = J_p + E_p$.

Die Kombination der 3 Relationen giebt:

$$EF^2 + FJ^2 + JE^2 = 2(J_p + E_p + F_p),$$
$$J_p = \tfrac{1}{2}(EJ^2 + FJ^2 - EF^2),$$
$$E_p = \tfrac{1}{2}(JE^2 + FE^2 - JF^2),$$
$$F_p = \tfrac{1}{2}(EF^2 + JF^2 - EJ^2).$$

Hieraus noch:

$$(2 \cdot EFJ)^2 = F_pJ_p + J_pE_p + E_pF_p.$$

38. In jedem Dreieck ist das Produkt von Höhe und Durchmesser, ebenso das Produkt der Winkelhalbierungslinie und der ganzen bis zum Umkreise verlängerten Sehne gleich dem Produkt der einschließenden Seiten; ferner das Produkt des verlängerten Stücks der Winkelhalbierungslinie mit dieser selbst gleich dem Quadrat der Entfernung des Bogenmittelpunktes von einem Endpunkte der gegenüberliegenden Dreiecksseite.

Der Beweis beruht darauf, daß man die Produktengleichungen in Proportionen verwandelt, deren Glieder Seiten von ähnlichen Dreiecken sind. Die Ähnlichkeit folgt aus der Gleichheit der Winkel, diese aus dem Satze vom Peripheriewinkel.

Der Satz von der Winkelhalbierungslinie läßt sich auf die äußere Winkelhalbierungslinie ausdehnen.

39. Halbiert man in einem rechtwinkligen Dreieck einen spitzen Winkel und verlängert die Halbierungslinie bis zum Umkreise, so ist diese Halbierungssehne die mittlere Proportionale zwischen dem Radius des Umkreises und der Summe der einschließenden Seiten.

Bew. 1. (Fig. 24.) Das Dreieck sei ABC mit dem rechten Winkel an der Ecke C, die Halbierungssehne AE, welche BC in D schneide, M der Mittelpunkt von AB, also auch vom Umkreise; es soll bewiesen werden:

$$AE^2 = (AB + AC) \cdot AM.$$

Verlängert man BA um AC bis F, so würde zu beweisen sein:

$$AE^2 = AM \cdot BF = BM \cdot BF.$$

Man könnte dies zurückführen auf:

$$\frac{AM}{AE} = \frac{AE}{BF} \text{ oder } \frac{BM}{AE} = \frac{AE}{BF}.$$

Dies ist durch ähnliche Dreiecke nicht zu erhalten, da AE und BF nicht Seiten eines Dreiecks sind. Wir müssen daher statt AE eine von B ausgehende Linie nehmen, welche ebensolang ist. Eine solche ist leicht zu erhalten, da AB ein Durchmesser ist, wir dürfen nur BG ∥ AE ziehen; dann ergiebt sich natürlich leicht, daß AGBE ein Rechteck ist, also EG ein Durchmesser, der zugleich senkrecht zu BC ist. Wir haben also zu beweisen:

$$BG^2 = BM \cdot BF \text{ oder } BM : BG = BG : BF.$$

Es muß also BGM ∽ BGF sein oder BG Tangente an einen Kreis durch FGM. Wir wollen dies letztere beweisen. Es ist CF ∥ AE, was aus Gleichheit von Winkeln folgt. Da GA ⊥ EA, so auch GA ⊥ CF. Nun liegen FCMG auf einem Kreise, denn G(CE) = A(CE) = F(CM). Der Mittelpunkt dieses Kreises muß auf GA liegen, weil GA die Mittelsenkrechte von CF ist; da nun BG ⊥ AG ist, so ist BG Tangente zu dem Kreise.

Bew. 2. Selbstverständlich kann man AE^2 auch in 2 Teile zerlegen, und die so erhaltenen Teile umformen. AE zerlegen wir am natürlichsten in AD und ED; also $AE^2 = AE \cdot AD + AE \cdot ED$. Nun ist $AD \cdot AE = AB \cdot AC = 2AM \cdot AC$. (s. Nr. 38.)

$AE \cdot DE = ED \cdot EA = EB^2 = AB^2 - AE^2$, also

$AE^2 = 2AM \cdot AC + AB^2 - AE^2$ oder

$2AE^2 = 2AM(AB + AC)$.

Das Wesentlichste des ersten Beweises ist, daß man vom Kreise um FGM beweist, daß er noch durch C geht, und es mag darauf hingewiesen werden, daß es häufig von Vorteil ist, von Kreisen, die man durch Punkte bestimmt, noch andere Punkte zu bestimmen, bez. andere Eigenschaften zu beweisen.

40. Teilt man die Seiten eines Dreiecks fortlaufend nach einem bestimmten Verhältnis und verbindet die erhaltenen Teilpunkte, so ist der Schwerpunkt des dadurch erhaltenen Dreiecks auch der Schwerpunkt des ursprünglichen.

Bew. (Fig. 24). ABC sei das Dreieck, A', B', C' seien die Teilpunkte, so daß $BA' : A'C = CB' : B'A = AC' : C'B = n : m$ ist. Da hier Längen, welche gleiche Verhältnisse haben, nicht von einem Punkte ausgehen, auch nicht, wenn man sie verlängert, so können wir die angegebenen Bedingungen nicht direkt benutzen, wir haben vielmehr Hilfslinien zu ziehen. Um diese zu erhalten, müssen wir das zu erreichende Ziel ins Auge fassen. Es soll bewiesen werden, daß der Schwerpunkt eines Dreiecks auch der Schwerpunkt eines andern Dreiecks ist. Zunächst ist zu fragen, durch welche Bedingungen wir den Schwerpunkt bestimmen wollen; er kann als Schnittpunkt von 2 Schwerlinien, dann auch als der Punkt einer Schwerlinie, der diese nach dem Verhältnis 2 : 1 teilt, angesehen werden. Die erste Bestimmung verlangt zunächst eine Folgerung, daher die zweite Bestimmung hier, die eine leichter zu verwertende Aussage enthält, als die vorteilhaftere erscheint. Der Satz würde danach bewiesen sein, wenn man zeigen kann, daß sich 2 Schwerlinien der beiden Dreiecke nach dem Verhältnis 2 : 1 schneiden. Zieht man in dem einen Dreieck die Schwerlinie AM, so ist die entsprechende im andern Dreieck A'M'; doch sei dabei bemerkt, daß es gleichgültig ist, welche Schwerlinien wir uns geschnitten denken, wir können also auch die Schwerlinien AM und C'P' in Verbindung bringen, wenn es besser paßt. Da Parallele durch Strahlen in gleichen Verhältnissen geschnitten werden, so liegt es hier nahe, Parallele als Hilfslinien zu ziehen. Ziehen wir z. B. $C'A'' \parallel AC$, wo A'' auf BC liegt, so haben wir:
$BC' : C'A = BA'' : A''C = m : n$; dies in Verbindung mit $BA' : A'C = n : m$ giebt die Folgerung $BA' = A''C$. Da also nun $CA'' : A''B = CB' : B'A = n : m$, so ist auch $A''B' \parallel AB$. In dem Dreieck A'A''B' sind nun M und P' die Mittelpunkte der Seiten A'A'' und A'B', also $MP' \parallel A''B' \parallel C'A$; auch $MP' = \frac{1}{2}A''B' = \frac{1}{2}C'A$. Daher müssen sich C'P' und AM in einem Punkte S schneiden, so daß $AS : SM = C'S : SP' = 2 : 1$ ist, woraus folgt, daß S in ABC und A'B'C' Schwerpunkt ist.

Einen andern Beweis liefert uns der Gedanke, daß die Schwerpunkte von 2 Dreiecken zusammenfallen, wenn sie eine Schwerlinie gemeinschaftlich haben, was eben daraus folgt, daß der Schwerpunkt jede Schwerlinie nach dem Verhältnis 2 : 1 teilt. Indem wir wieder $C'A'' \parallel AC$ ziehen und A mit A' verbinden, finden wir, daß ABC und AA'A'' die Schwerlinie AM, also auch den Schwerpunkt gemein haben. Da nun AC'A''B' ein Parallelogramm ist, so ist der Mittelpunkt M' von B'C' auch der von AA'', daher A'M' Schwerlinie in Dreieck A'B'C' und in AA'A''. Da AA'A'' und A'B'C' also auch den Schwerpunkt S gemein haben, so auch ABC und A'B'C'.

Selbstverständlich läßt sich der Satz auf den Fall ausdehnen, wenn die Teilpunkte auf den Verlängerungen der Seiten liegen.

41. Wenn man in einem Kreisviereck die beiden Diagonalen zieht, dann die 4 Dreiecke aus je 2 Seiten und einer Diagonale bestimmt, so bilden die Mittelpunkte der Inkreise dieser 4 Dreiecke die Ecken eines Rechtecks.

Bew. (Fig. 25). ABCD sei das Viereck, die betreffenden Dreiecke erhalten wir, wenn wir je eine Ecke fortlassen; es sind also BCD, CDA, DAB, ABC. Die Mittelpunkte der Bogen AB, BC, CD, DA seien bez. M, N, P, Q, ferner a, b, c, d die Mittelpunkte der Inkreise von BCD, CDA, DAB, ABD. Die Einführung der Mittelpunkte jener Bogen giebt uns dann leicht eine Bestimmung der vorher genannten Punkte a, b, c, d. Beschreibt man nämlich von P mit PC = PD den Kreis, so geht derselbe durch a und b; ebenso geht der mit QD = QA von Q geschlagene Kreis durch b und c, der von M mit MA = MB geschlagene Kreis geht durch c und d und der von N mit NB = NC geschlagene Kreis durch d und a; wir können uns also die Punkte durch jene Kreise bestimmt denken. Wir wissen dann, daß PaB, PbA, QbC, QcB, McD, MdC, NdA, NaD auf Geraden liegen. Endlich ist zu berücksichtigen, daß MNPQ auf dem Umkreise von ABCD liegen. Da sich in A 2 Kreise schneiden, so werden wir die hier entstehenden Peripheriewinkel mit andern vergleichen. Es ist A(PD) = M(PD), oder da A, b, P in einer Geraden liegen: A(bD) = c(bD), also M(PD) = c(bD), somit bc ∥ MP. Ebenso ist zu beweisen, daß da ∥ MP ist, dagegen cd ∥ ON ∥ ab. Aus den Bedingungen für M, N, P, Q folgt dann noch leicht, daß die Bogen MN und PQ zusammen einen Halbkreis betragen, also MP ⊥ NQ ist, daher auch bc ⊥ cd ꝛc. d. h. abcd ist ein Rechteck.

Es ergeben sich leicht noch andere Folgerungen. Es ist PM ⊥ ab, auch PM ⊥ cd, da aber ab und cd Sehnen in Kreisen sind, deren Mittelpunkte P und M sind, so werden diese Sehnen durch MP halbiert, ebenso werden bc und da durch NQ halbiert. — Verlängert man noch aP um sich selbst bis a_1, so ist dieser Punkt der Mittelpunkt des Ankreises von Dreieck BCD, und a_1b ⊥ ba, also cba_1 in einer Geraden. Auf derselben Geraden liegt auch d_1, der Mittelpunkt eines Ankreises von ABC, und zwar wird d_1 erhalten, indem man dM um sich selbst verlängert.

42. In jedem Viereck ABCD liegt der Schwerpunkt S, der Schnittpunkt O der Verbindungslinien der Mittelpunkte der Gegenseiten und der Schnittpunkt E der Diagonalen in einer Geraden, wobei der Punkt O die Strecke zwischen den beiden andern nach dem Verhältnis 1 : 3 teilt.

Bew. (Fig. 26). Es seien F, G, H, I, M, N die Mittelpunkte von AB, BC, CD, DA, AC, BD; dann D' der Schwerpunkt von ABC und B' der von ACD; B'D' schneide AC in K und MN in N'. Die Einführung dieser Punkte ist geboten, um die Punkte, von denen der Satz handelt, zu bestimmen. Der Schwerpunkt des Vierecks muß nämlich auf B'D' liegen. Um aber B'D' zu bestimmen, brauchen wir die Mittelpunkte H, G, M, F. Es liegt daher nahe, auch die andern Mittelpunkte einzuführen. Es wird ferner B'D' durch S so geteilt, daß sich die Teile wie die Dreiecke ABC und ADC verhalten, oder da ABC : ADC = BE : ED ist, so folgt BE : DE = B'S : SD'. Ist dann K der Schnittpunkt von AC mit B'D', so folgt BE : DE = D'K : KB'. Dies führt zur Folgerung, daß S erhalten wird, wenn man B'S = KD' macht; der Mittelpunkt von B'D' ist also auch der von SK. Da nun MB'D' ∞ MDB ist, so halbiert MN die Gerade B'D' in N', auch geht MN durch O(N 10); B'D' : BD = MB' : MD = 1 : 3, also MN' : MN = 1 : 3, ebenso: N'K : NE = 1 : 3; also da SN' = N'K, auch SN' : NE = 1 : 3. und da auch N'O : ON = 1 : 3, so folgt, daß SOE in einer Geraden liegen.

Bem. Wie schon früher, so ist auch hier von ganz besonderer Bedeutung für den Schwerpunkt des Dreiecks die Bestimmung, daß er eine Schwerlinie nach dem Verhältnis 2 : 1 teilt.

43. Wenn man in einem Kreise auf einem Durchmesser 2 Punkte A und B gleich weit vom Mittelpunkte O annimmt, einen beliebigen Punkt P der Peripherie mit denselben verbindet, wodurch man die Schnittpunkte C und D dieser Verbindungslinie mit dem Kreise erhält, dann den Schnittpunkt N von CD und AB bestimmt und endlich den Gegenpunkt Q zu P auf dem Kreise nimmt, so ist NQ Tangente an diesen Kreis.

Bew. (Fig. 27). Betrachten wir zunächst die Bedingungen an sich, so werden wir aus AO = OB, PO = OQ die Folgerung ziehen, daß QBPA ein Parallelogramm ist. Dies giebt uns schon die Gleichheit von Längen und Winkeln. Einige dieser Winkel sind Peripheriewinkel, aus denen wir also leicht neue Folgerungen ziehen können. Es ist P(BQ) = Q(AP), P(BQ) = C(QD), also Q(AP) = C(QD); ferner D(CQ) = P(CQ). Somit finden wir, daß die Dreiecke CQD und QPA in 2 Winkeln übereinstimmen. Die allergewöhnlichste Folgerung würden Proportionen sein, uns kommt es indessen auch darauf an, von N eine Folgerung zu haben, wobei auch manche der schon benutzten Bedingungen nochmals zur Anwendung kommen können. Wir haben von QPA eine Aussage; da N auf AO liegt, so werden wir AO in Betracht ziehen. Da AO Schwerlinie in QAP ist, so werden wir in

CQD die entsprechende Schwerlinie QM ziehen, wo M der Mittelpunkt von CD ist. Entsprechende Schwerlinien in ähnlichen Dreiecken teilen dieselben wieder in ähnliche Dreiecke; also ist O(AQ) = M(CQ) oder O(NQ) = M(NQ), also liegen M, O, N, Q auf einem Kreise. Da M(ON) = 90°, so ist auch Q(ON) = 90°, also NQ Tangente an Kreis O.

Bem. Als besonders wichtig erscheint hier die Einführung der Mittelpunkte O und M von PQ und CD.

44. Das Parallelogramm, dessen Ecken die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen konvexen Vierecks sind, ist halb so groß als das Viereck.

Bew. Die Flächen von Figuren führt man wesentlich auf Parallelogramme und Dreiecke zurück. Zur Anwendung bei der Vergleichung von Figuren in Bezug auf den Flächeninhalt kommen die Sätze: Parallelogramme und Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich; das Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe. Dreiecke und Parallelogramme verhalten sich wie die Produkte von Grundlinie und Höhe. Ähnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten oder Linien.

Es sei nun ABCD ein beliebiges Viereck (Fig. 28), E, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA. Das Viereck müssen wir in Dreiecke zerlegen, wir ziehen daher die Diagonale BD, wodurch auch das Parallelogramm EFGH in 2 Teile EKJH und FGJK zerlegt wird. Jedes dieser beiden Parallelogramme ist die Hälfte der entsprechenden Dreiecke, da sie die halben Grundlinien und Höhen haben, daher auch das ganze Parallelogramm die Hälfte des Vierecks.

45. Der Inhalt des Dreiecks wird durch den Ausdruck dargestellt:

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{(t'+t''+t''')\,(t''+t'''-t')\,(t'''+t'-t'')\,(t'+t''-t''')}\,.$$

Bew. Wir setzen voraus, daß der Inhalt des Dreiecks durch den Ausdruck gegeben wird: $\sqrt{p(p-a)\,(p-d)\,(p-c)}$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(c+a-b)\,(a+b-c)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}.$$

Die Gleichartigkeit des Ausdrucks durch die Schwerlinien und durch die Seiten führt dazu, das gegebene mit einem andern zu vergleichen, dessen Seiten gleich oder proportional den Schwerlinien sind. Ein solches kann man leicht erhalten. Ist (Fig. 10) ABC das Dreieck, AD eine Schwerlinie, G der Schwerpunkt, und wird GL = AG gemacht, so ist BGL ein Dreieck, dessen Seiten $\frac{2}{3}$ der Schwerlinien sind, und dessen Inhalt $\frac{1}{3}$ des gegebenen Dreiecks ist. Daher ist

$$\tfrac{1}{3}\triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}(t'+t''+t''')(t''+t'''-t')(t'''+t'-t'')(t'+t''-t''')},$$

oder

$$\triangle = \tfrac{1}{3}\sqrt{(t'+t''+t''')\,(t''+t'''-t')\,(t'''+t'-t'')\,(t'+t''-t''')}\,.$$

Einen andern Weg erhält man, wenn man die Seiten durch die Schwerlinien ausdrückt, was sehr leicht ist. Man hat:
$4t'^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, $4t''^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$, $4t'''^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$,
also $\frac{9a^2}{16} = 2t''^2 + 2t'''^2 - t'^2$, $\frac{9}{16} b^2 = 2t'''^2 + 2t'^2 - t''^2$,

$$\frac{9}{16} c^2 = 2t'^2 + 2t''^2 - t'''^2.$$

Der Inhalt wird aber, wie oben angegeben, durch eine Wurzel gegeben, welche nur die Quadrate der Seiten enthält. Die Ausführung der Rechnung führt dann zum Resultat.

46. Wenn man in und um ein Dreieck 2 Dreiecke konstruiert, so daß je 2 Seiten dieser neuen Dreiecke parallel sind, so ist das gegebene Dreieck das geometrische Mittel zwischen den beiden andern.

Bew. (Fig. 29). Es sei ABC das gegebene Dreieck, A'B'C' das eingeschriebene, A''B''C'' das umschriebene Dreieck. Aus den Bedingungen A'B' ∥ A''B'', B'C' ∥ B''C'', C'A' ∥ C''A'' folgt sofort, daß sich A'A'', B'B'', C'C'' in einem Punkte S schneiden. Durch diese Verbindungslinien werden die 3 Dreiecke in 3 Teile geteilt, es liegt daher nahe, diese Teile untereinander zu vergleichen. Sehen wir uns zunächst SB'C' und SB''C'' an, so sind diese Dreiecke ähnlich. Setzen wir B'C' = a', B''C'' = a'', so ist also

$$SB'C' : SB''C'' = a'^2 : a''^2.$$

Unter entsprechender Bezeichnung, C'A' = b', C''A'' = b'', A'B' = c', A''B'' = c'' erhalten wir dann:

$$SC'A' : SC''A'' = b'^2 : b''^2 = a'^2 : a''^2$$
$$SA'B' : SA''B'' = c'^2 : c''^2 = a'^2 : a''^2.$$

Bezeichnen wir nun den Abstand des Punktes S von B'C' mit h', von B''C'' mit h'', so ist Viereck SB'AC', welches ein Teil von ABC ist, gleich der Summe von 2 Dreiecken mit den Höhen h' und h'' − h' und der gemeinschaftlichen Grundlinie a', der Inhalt also $\frac{a'h''}{2}$. Aus der Ähnlichkeit von SB'C' und SB''C'' folgt aber a' : a'' = h' : h'', also $a'h'' = a''h' = \sqrt{a'h' \cdot a''h''}$, also $SB'AC' = \sqrt{SB'C' \cdot SB''C''}$.

Setzen wir nun $\frac{a'^2}{a''^2} = \lambda^2 = \frac{A'B'C'}{A''B''C''}$, so folgt:

$SB'C' = \lambda^2 SB''C''$, also $\sqrt{SB'C' \cdot SB''C''} = \lambda \cdot SB''C''$, also $SB'AC' = \lambda . SB''C''$, ebenso $SC'BA' = \lambda . SC''A''$, $SA'CB' = \lambda . SA''B''$, und durch Addition $ABC = \lambda \cdot A''B''C'' = \sqrt{\frac{A'B'C'}{A''B''C''}} \cdot A''B''C'' =$

$$\sqrt{A'B'C' \cdot A''B''C''}.$$

Bem. Die Bedingungen führen uns zur Benutzung des Punktes S und der Gleichartigkeit der Verhältnisse der Teile der Dreiecke.

47. Nimmt man auf den Seiten eines Dreiecks ABC solche Punkte L, L_1, M, M_1, N, N_1 an, daß $BL = L_1C$, $CM = M_1A$, $AN = N_1B$ ist, so sind die Dreiecke LMN und $L_1M_1N_1$ einander gleich.

Bew. (Fig. 30). Setzt man $BL = l$, $LC = l_1$, $CM = m$, $MA = m_1$, $AN = n$, $NB = n_1$, so erhält man durch Anwendung des Satzes vom Inhalt von Dreiecken, wenn $ABC = \triangle$ gesetzt wird:

$$BLN = \triangle \cdot \frac{ln_1}{(l+l_1)(n+n_1)}, \quad CML = \frac{ml_1 \cdot \triangle}{(m+m_1)(l+l_1)}, \quad ANM = \frac{nm_1 \cdot \triangle}{(n+n_1)(m+m_1)},$$

also

$$LMN = \frac{\triangle}{(l+l_1)(m+m_1)(n+n_1)} \cdot \{(l+l_1)(m+m_1)(n+n_1) - ln_1(m+m_1) - ml_1(n+n_1) - nm_1(l+l_1)\}$$

$$= \frac{\triangle (lmn + l_1m_1n_1)}{(l+l_1)(m+m_1)(n+n_1)}.$$

Will man $L_1M_1N_1$ erhalten, so ist l mit l_1, m mit m_1, n mit n_1 zu vertauschen. Dadurch ändert sich aber der Wert nicht, daher

$$LMN = L_1M_1N_1.$$

48. Fällt man von einem Punkte innerhalb eines Dreiecks die Lote auf die Seiten und bestimmt die Höhen, so ist die Summe der Verhältnisse der Lote zu den entsprechenden Höhen gleich 1.

Bew. Das Dreieck sei ABC, die Lote vom Punkte P auf die Seiten p', p'', p''', die Höhen h', h'', h''', dann soll sein:

$$\frac{p'}{h'} + \frac{p''}{h''} + \frac{p'''}{h'''} = 1.$$

Man verbinde P mit den Ecken A, B, C, so entstehen 3 Dreiecke, die zusammen den Inhalt des Dreiecks geben. Da die Lote die Höhen der Dreiecke sind, so kann man dadurch die Inhalte dieser Dreiecke leicht ausdrücken. Nach gewöhnlicher Bezeichnung hat man:

$$p' \cdot a + p'' \cdot b + p''' \cdot c = 2\triangle.$$

Man wird hier also durch $2\triangle$ dividieren und erhält

$$p' \cdot \frac{a}{2\triangle} + p'' \cdot \frac{b}{2\triangle} + p''' \cdot \frac{c}{2\triangle} = 1 \text{ oder}$$

$$\frac{p'}{h'} + \frac{p''}{h''} + \frac{p'''}{h'''} = 1.$$

Bem. Der Punkt kann natürlich auch außerhalb des Dreiecks liegen, in diesem Falle müssen die Lote negativ genommen werden, welche in dem entgegengesetzten Flächenteil als das Dreieck liegen, wenn der Satz noch gelten soll. — Man sieht noch leicht ein, daß hieraus noch folgt:

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''} = \frac{1}{\rho}, \text{ auch}$$

$$-\frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''} = \frac{1}{\rho}.$$

49. Wenn man in einem Dreieck ABC die Schwerlinie AA_0 von der Ecke A zieht, dieselbe um sich selbst bis A' verlängert, ferner die Winkelhalbierungslinie an derselben Ecke bestimmt, welche BC in D treffe, so hat jeder Punkt der Geraden A'D die Eigenschaft, daß, wenn man durch ihn die Parallelen zu AB und AC zieht, die Stücke derselben innerhalb der Winkelräume von B und C einander gleich sind.

Bew. (Fig. 31). Indem wir die Bedingungen aufstellen, werden wir sofort die Folgerungen ziehen A'B ∥ AC, A'C ∥ AB, ferner BD : DC = AB : AC.

Es sei nun P ein Punkt von A'D, und PXY ∥ AC, PUV ∥ AB, wo X, Y, U, V die Schnittpunkte der betreffenden Geraden mit BC, AB, bez. BC, AC sind. Zunächst ist zu folgern: PY ∥ A'B, PV ∥ A'C. Zieht man also noch DE ∥ AC, DF ∥ AB, so hat man 2 Trapeze DEBA', DFCA' mit 2 Parallelen zu den parallelen Seiten.

Dies giebt BY : BE = A'P : A'D = CV : CF;

dann auch BY : BE = XY : DE; CV : CF = UV : FD,

also folgt aus beiden Gleichungen XY : DE = UV : FD.

Eine andere Eigenschaft des Punktes D ist aber auch, daß DE = DF ist, eine Eigenschaft, die sich leicht aus gleichen Winkeln ableiten läßt, und auf die daher hier aufmerksam gemacht wird. Daraus folgt XY = UV.

Es ist wohl nicht nötig hinzuzufügen, daß der Punkt P auch innerhalb des Dreiecks angenommen werden darf.

50. Man habe 2 Kreise mit den Mittelpunkten A und C, die sich in B von außen und eine Gerade in den Punkten D und E berühren; zieht man hier durch B eine beliebige Sekante, welche die Kreise zum zweiten Male in F und G schneidet, so werden sich FD und GE in H rechtwinklig schneiden, und HB ist rechtwinklig zu FG.

Bew. (Fig. 32). Die Figur ist nach den Bedingungen des Satzes bestimmt; dann ist die erste Folgerung, daß ABC eine Gerade ist und AD ⊥ DE, ebenso CE ⊥ DE, also ADEC ein Trapez. Daraus machen wir sofort die Folgerung, daß die Summe der Winkel bei A und C 2 Rechte beträgt. Wir werden zu dieser Folgerung schon dadurch geführt, daß es Centriwinkel sind. Die dazu gehörigen Peripheriewinkel sind F(BD) und G(BE); da sie zusammen einen Rechten betragen, so folgt sofort H(FG) = 1 R. Es ist die Frage, ob wir hieraus eine Folgerung machen oder ob wir direkt an die Bedingungen

anknüpfen. Man wird bald erkennen, daß es gut ist, erst eine Folgerung zu machen; eine solche erhalten wir durch Einführung des Mittelpunktes M von FG; es ist MF = MH = MG und M(GH) = 2 . F(GH), also M(GH) = A(DB). Aus der Berührung folgt noch FB:BG = r:ρ, wenn r und ρ die Radien der Kreise sind, also MB:MH = r − ρ:r + ρ. Ein Dreieck mit r − ρ und r + ρ erhalten wir, wenn wir von C das Lot CK auf AD fällen. Da nun ACK und MBH in einem Winkel und dem Verhältnis der einschließenden Seiten übereinstimmen, so sind sie ähnlich, also B(MH) = K(AC) = 1R.

C. Dritte Stufe.

Benutzung aller möglichen Hilfsmittel, der trigonometrischen Funktionen, der harmonischen und projektivischen Gebilde. Darstellung von zusammenhängenden Eigenschaften von Figuren.

Vorbemerkung. Die trigonometrischen Funktionen dienen vorzugsweise zur Berechnung von Längen, indirekt können sie indessen auch zur Bestimmung der Lage von Punkten und Geraden benutzt werden. Die wichtigste Anwendung harmonischer Gebilde erhält man, wenn man einen Punkt mit 4 harmonischen Punkten verbindet, wodurch man harmonische Strahlen erhält, dann aber diese Strahlen wieder durch eine Transversale schneidet. Der Kernpunkt der Beweise beruht in vielen Fällen darauf, jene Punkte und jene Transversale richtig zu wählen. Projektivische Eigenschaften (kollineare Dreiecke, Kegelschnitte) werden vorzugsweise im Anhang zur Verwendung kommen.

51. Erklärung einiger Begriffe. Denkt man sich in einem Dreieck eine Ecktransversale gezeichnet und den Winkel, welchen sie mit der einen der beiden Seiten bildet, an der andern angetragen, so erhält man an dieser Ecke eine neue Ecktransversale, welche die Winkelgegentransversale — kürzer auch Gegentransversale — der andern heißt. Zieht man also an der Ecke A eine Transversale v, so daß (c, v) = φ ist, und ist eine Transversale w durch A so beschaffen, daß (w, b) = φ ist, so heißt w die Gegentransversale von v, natürlich auch umgekehrt.

Schneiden sich 3 Ecktransversalen in einem Punkte, so auch die Gegentransversalen. Sind V und W die beiden Schnittpunkte, so werden dieselben als Winkelgegenpunkte — kürzer auch Gegenpunkte — bezeichnet.

Denkt man sich ferner zu allen Punkten einer Kurve die Winkelgegenpunkte bestimmt, so erhält man eine neue Kurve. Man bezeichnet

die beiden als Kurven, die durch isogonale Verwandtschaft (Neuberg) verbunden sind.

Bestimmt man den Schnittpunkt einer Ecktransversale mit deren Gegenseite, trägt das Stück von diesem Punkte bis zu einer anliegenden Ecke verkehrt auf, wodurch man einen zweiten Punkt auf der betreffenden Seite erhält, verbindet endlich diesen Punkt mit der ersten Ecke, so wird diese Ecktransversale als Seitengegentransversale bezeichnet. Sind z. B. P und Q Punkte auf BC, so daß $BP = QC$ ist, so sind AP und AQ Seitengegentransversalen.

Schneiden sich 3 Ecktransversalen in einem Punkte, so auch die Seitengegentransversalen. Die entsprechenden Punkte heißen Seitengegenpunkte des Dreiecks.

Bestimmt man zu allen Punkten einer Kurve die Seitengegenpunkte, so erhält man eine neue Kurve, die mit der ersten durch isotomische Verwandtschaft (Neuberg) verbunden ist.

Bem. 1. Die Ableitung der voneinander abhängigen Eigenschaften von Seitengegentransversalen und Seitengegenpunkten ist synthetisch schwerer zu behandeln, als die von Winkelgegentransversalen und Winkelgegenpunkten, weil die Benutzung von gleichen nichtanstoßenden Längen weniger einfach ist als die von Winkeln.

Die Winkelgegentransversalen der Schwerlinien heißen Symmedianen oder Gegenmittellinien. Der Schnittpunkt der Symmedianen heißt Punkt von Grebe oder Lemoine, auch Symmedianpunkt. Da besonders Lemoine viele sich auf diesen Punkt beziehende Eigenschaften abgeleitet hat, so ist die Bezeichnung Punkt von Lemoine zu empfehlen.

Bem. 2. Bei den Beweisen soll vorzugsweise nur darauf aufmerksam gemacht werden, wie die Bedingungen eingeführt oder benutzt werden; im übrigen aber sollen sie nur kurz angegeben werden.

a) Vereinzelte Sätze.

52. Die Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den Berührungspunkten des Inkreises schneiden sich in einem Punkte. (Punkt von Gergonne.)

Der Satz wird aufgestellt als Beispiel dafür, daß es unter Umständen vorteilhafter ist, einen Satz als Specialfall eines allgemeinen anzusehen. Die Bezeichnung sei die allgemeine (Fig. 19). Es sollen sich also AO_a, BO_b, CO_c in einem Punkte schneiden. Die Punkte O_a, O_b, O_c können wir durch die Bedingungen $O_bA = AO_c$, $O_cB = BO_a$, $O_aC = CO_b$ bestimmen. Indessen ist für den Schnittpunkt J von 2 Transversalen z. B. BO_b, CO_c keine einfache Folgerung zu ziehen.

Dagegen ergiebt sich die Richtigkeit leicht aus dem allgemeinen Satz des Ceva. Es ist hier

$$\frac{BO_a}{O_aC} \cdot \frac{CO_b}{O_bA} \cdot \frac{AO_c}{O_cB} = 1,$$

da $O_bA = AO_c$ ꝛc. ist.

Die Ausdehnung dieses Satzes auf die Berührungspunkte sämtlicher Berührungskreise ist selbstverständlich.

53. Die Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den Berührungspunkten der zugehörigen Ankreise schneiden sich in einem Punkte. Der Mittelpunkt des Inkreises, der Schwerpunkt und dieser Punkt liegen in einer Geraden.

Der Beweis ist ebenfalls eine Folgerung aus dem Satze von Ceva. Da nämlich $BO_a = O_a'C$, $CO_b = O_b'A$, $AO_c = O_c'B$ (Fig. 19) ist, so ist ebenfalls das Tripelverhältnis dieser Punkte in Bezug auf das Dreieck gleich 1.

Wir wollen hieran noch einige Bemerkungen knüpfen. Der hierdurch bestimmte Schnittpunkt K wird gewöhnlich als der Nagelsche bezeichnet. Derselbe ist offenbar der Seitengegenpunkt des vorher angegebenen Punktes J, welcher erhalten wird, wenn man die Ecken mit den Berührungspunkten des Inkreises verbindet.

Verbindet man ferner O_a' mit A, O, O_α, O' (O_α der Schnittpunkt der Winkelhalbierungslinien mit der Gegenseite), so erhält man 4 harmonische Strahlen, da AO_α durch OO' harmonisch geteilt wird. Zieht man also OO_a, welches parallel zum Strahle $O'O_a'$ ist, so muß das Stück zwischen den Strahlen $O_a'O_a$ und $O_a'A$ durch den Strahl $O_a'O$ halbiert werden. Ist also N der Schnittpunkt von O_aO mit AO_a', so ist $O_aO = ON$; da nun auch $O_aM_a = M_aO_a'$ ist, so ist $OM_a \parallel AO_a'$. Wir finden somit:

Die Verbindungslinie einer Ecke mit dem Berührungspunkte des zur Ecke gehörigen Ankreises auf der Gegenseite ist parallel der Verbindungslinie des Mittelpunktes des Inkreises mit dem Mittelpunkte der Gegenseite.

Man wird ebenso beweisen können, daß $O'M_a \parallel AO_a$ ist.

Eine andere Folgerung läßt sich aber noch machen. Es ist Dreieck $M_aM_bM_c \sim ABC$, auch in ähnlicher Lage, daher sind AK, BK, CK und M_aO, M_bO, M_cO entsprechende Linien; daher O und K in diesen Dreiecken entsprechende, d. h. ähnlich gelegene Punkte; es muß also KO durch den Schwerpunkt gehen und KO durch diesen Punkt nach dem Verhältnis 2 : 1 geteilt werden.

54. Fällt man von 2 Ecken eines Dreiecks die Lote auf die Halbierungslinie des Winkels an der dritten Ecke, so wird dieselbe durch die Fußpunkte harmonisch geteilt.

Bew. (Fig. 33). Das Dreieck sei ABC, AE die Halbierungslinie des Winkels A, die Fußpunkte der Lote von B und C auf AE seien V und W; dann soll bewiesen werden, daß AE durch VW harmonisch geteilt wird. Harmonische Punkte suchen wir wesentlich auf harmonischen Strahlen. Es kommt darauf an, die Bedingungen für V und W zu benutzen, daher werden wir BV und CW als 2 Strahlen ansehen, welche natürlich Parallelstrahlen sind. Wir ziehen daher durch A und E die Parallelen zu BV und CW und fragen, ob auf diesen Parallelen ein System harmonischer Punkte ist. Nun ist das Lot durch A die äußere Winkelhalbierungslinie, welche mit der innern und den Seiten ein System harmonischer Strahlen bildet. Schneidet also die äußere Winkelhalbierungslinie die Seite BC in F, so wird BC durch EF harmonisch geteilt. Da also jene Strahlen durch diese Punkte harmonisch geteilt werden, so wird auch jede Transversale, wie z. B. AE durch VW harmonisch geteilt.

Daß der Satz auf die äußere Winkelhalbierungslinie ausgedehnt werden kann, ist selbstverständlich.

55. Bestimmt man zu einem Dreieck ABC das Mittendreieck $A_0B_0C_0$, dann den inbeschriebenen Kreis dieses Dreiecks, der die Seiten desselben in A'B'C' berührt, dann sind die Dreiecke ABC und A'B'C' kollinear; das Kollineationscentrum ist der Nagelsche Punkt von ABC, und die Verbindungslinie desselben mit dem Schwerpunkt des Dreiecks ist senkrecht zur Kollineationsachse.

Bew. (Fig. 34). Es ist A_0 der Pol von B'C' in Bezug auf den Inkreis von A'B'C'. Schneidet also B'C' die Gerade BC in P, so geht die Polare von P durch A_0. Zieht man noch die Schwerlinie AA_0, welche B'C' in P' schneiden mag, so wird B'C' durch PP' harmonisch geteilt, da $A_0(B_0C_0P'P)$ harmonisch ist; es geht folglich die Polare von P durch P', also ist A_0A die Polare von P; ist dann Q der Schnittpunkt von AC mit A'C', R der Schnittpunkt von AB mit A'B', so sind auch BB_0 und CC_0 die Polaren von Q und R. Da sich AA_0, BB_0, CC_0 im Schwerpunkte S von ABC schneiden, so liegen P, Q, R in einer Geraden, der Polare von S in Bezug auf den Umkreis von A'B'C'. Ist noch A'' der Berührungspunkt des Ankreises von $A_0B_0C_0$ für die Ecke A_0, so ist $A_0A'' \parallel AA'$, weil $B_0A' = A''C_0$, also $AB_0A' \cong A_0C_0A''$ ist. Da A_0A'' durch den Nagelschen Punkt von $A^0B^0C^0$ geht, so also AA' durch den Nagelschen Punkt T von ABC, und T ist also das Kollineationscentrum von ABC und A'B'C'. Die Kollineationsachse ist die Polare von S in Bezug auf dem Umkreis von A'B'C; ist somit O_0 der Mittelpunkt des

Kreises, so ist $O_0S \perp PQR$. Ist aber O der Mittelpunkt des Inkreises von ABC, so liegen O_0SO in einer Geraden, auf der auch T liegt (Nr. 53), es ist also $TS \perp PQR$.

Bem. Der Schwerpunkt wird zum Teil durch die Bedingung eingeführt, daß $A_0(B_0C_0SB)$ ein harmonisches Strahlenbüschel ist. Was TS betrifft, so ist es wesentlich, daß noch bewiesen wird, daß diese Gerade durch O_0 geht.

56. Wenn man von 2 Punkten A und B die Polaren in Bezug auf den Kreis O nimmt und von jedem Punkte die Lote auf die Polare des andern Punktes fällt, so verhalten sich diese wie die Entfernungen der betreffenden Punkte vom Mittelpunkte.

Bew. (Fig. 35). G und E seien die reciproken Punkte von A und B (d. h. die Schnittpunkte der zugehörigen Durchmesser und Polaren), OB schneide die Polare a von A in F, OA die Polare b von B in D. Es ist $OE \cdot OB = OG.OA$ oder $OE:OA = OG:OB$. Dies giebt die Folgerung $B(EG) = A(EG)$. Da noch $D(AE) = F(GB)$, so ist $GFB \sim EDA$, also $\frac{BF}{AD} = \frac{FG}{ED}$; aber $\frac{FG}{ED} = \frac{OG}{OE} = \frac{OB}{OA}$. Aus den ähnlichen Dreiecken APD und BQF, wo P und Q die Fußpunkte der Lote von A und B auf b und a sind, folgt $BQ:AP = BF:AD$; es folgt also $BQ:AP = OB:OA$.

Bem. Die reciproken Punkte bestimmen die Polaren, ferner in Verbindung mit den gegebenen Punkten Kreisvierecke. Die Benutzung derselben führt zum Ziele.

57. Es seien in der Ebene eines Kreises 2 parallele Gerade L und N gegeben; durch einen beliebigen Punkt P auf der einen zieht man 2 Tangenten an den Kreis, welche auf der andern ein Segment AB bestimmen. Man soll beweisen, daß die Verbindungslinie von P mit dem Mittelpunkt M von AB stets durch denselben Punkt geht, wie man auch P verändert.

Bew. (Fig. 36). Es liege P auf L, dann ist AB eine Strecke auf N. PA, PB, PM, L sind 4 harmonische Strahlen, somit PM und L 2 konjugierte Strahlen in Bezug auf den Kreis, daher geht PM durch den Pol Q von L, d. h. durch einen festen Punkt.

Bem. Die Bedingung für M als Mittelpunkt und $L \parallel N$ wird durch die harmonischen Strahlen benutzt; der feste Punkt wird durch die gegebenen Gebilde zu bestimmen gesucht.

58. Ein Kreissechseck mit den aufeinanderfolgenden Seiten a, c', b, a', c, b' habe die Hauptdiagonalen e, f, g, dann gilt die Gleichung:

$$efg = aa'e + bb'f + cc'g + abc + a'b'c'.$$

Bew. (Fig. 37). Damit der Satz diese symmetrische Gestalt erhalten kann, muß auch die Bezeichnung symmetrisch sein; es ist hiernach e die Verbindung von bc' und b'c, f die von ca' und c'a, g die von ab' und a'b. — Daß nun der Satz des Ptolemäus anzuwenden ist, dürfte evident sein. Wir werden also den Ausdruck rechts zerlegen und je 2 Glieder betrachten, die einen Faktor gemein haben; solche sind cc'g und abc, sowie bb'f und a'b'c'. Indem wir noch die Diagonalen ac' — a'b mit u, ab' — bc' mit x, bc' — a'c mit y, a'c — ab' mit z bezeichnen, finden wir zunächst:

$$c'g + ab = ux,$$
$$bf + a'c' = uy;$$

man wird erkennen, daß man solche Vierecke nimmt, die einen gemeinsamen Faktor (hier u) geben, den man in der Summe herausziehen kann. Die obigen Gleichungen geben:

$$cc'g + abc + bb'f + a'b'c' = u(cx + b'y).$$

Es ist ferner $cx + b'y = ez$, also

$$cc'g + bb'f + abc + a'b'c' = euz;$$

dann $fg = uz + aa'$, also

$$efg = euz + eaa' = aa'e + bb'f + cc'g + abc + a'b'c'.$$

59. Wenn man in einem Dreieck die Fußpunkte von 2 Winkelhalbierungslinien verbindet und von einem beliebigen Punkte der erhaltenen Geraden die Lote auf die Seiten fällt, so ist immer ein Lot so groß als die Summe der beiden andern.

Bew. (Fig. 38). Es seien im Dreieck ABC die Geraden BE und CF 2 Winkelhalbierungen, und EF schneide BC in D. Ist dann P ein beliebiger Punkt dieser Geraden EF, und PP_a, PP_b, PP_c die Lote von P auf die Seiten des Dreiecks ABC, dann soll sein:

$$PP_a \pm PP_b \pm PP_c = 0.$$

Wenn wir von E das Lot EE_a auf BC und das Lot EE_c auf AB fällen, dann ergiebt sich:

$$PP_a : EE_a = DP : DE,$$
$$PP_c : EE_c = FP : FE;$$

wir fällen ebenso die Lote von F auf BC und AC, nämlich FF_a und FF_b und finden:

$$PP_b : FF_b = EP : EF,$$
$$EE_a : FF_a = DE : DF.$$

Wir können nun PP_a, PP_b, PP_c durch die Lote von E und F ausdrücken:

$$PP_a = \frac{DP}{DE} . EE_a, \quad PP_c = \frac{FP}{FE} . EE_c,$$

$$PP_b = \frac{EP}{EF} . FF_b.$$

Nun ist aber $EE_c = EE_a$ und die letzte Proportion drückt FF_a, welches so viel als FF_b ist, durch EE_a aus, dadurch können wir alle Lote durch EE_a ausdrücken, also

$$PP_c = \frac{DP}{ED} \cdot EE_a, \quad PP_c = \frac{FP}{FE} . EE_a,$$

$$PP_b = \frac{EP}{EF} . FF_a = \frac{EP}{EF} \cdot \frac{DF}{DE} . EE_a;$$

es ist also

$$PP_a \pm PP_b \pm PP_c = \frac{EE_a}{EF . ED} \{DP . EF \pm EP . DF \pm FP . DE\}.$$

Der Ausdruck in der Klammer ist aber bei richtiger Zeichenbestimmung 0. Ist z. B. die Reihenfolge DPFE, so ist

$$PE . DF = DP . FE + PF . DE.$$

Mit Einführung der Zeichenregel würde die Relation ganz allgemein heißen:

$$PD . EF + PE . FD + PF . DE = 0.$$

Sieht man ferner die Lote als positiv an, wenn sie auf demselben Ebenenteil als das Dreieck liegen, negativ im andern Falle, so würde hier die Relation ganz allgemein lauten:

$$PP_a = PP_b + PP_c.$$

Daß in diesem Falle die Seite a einen besondern Vorzug genießt, liegt daran, daß die Winkelhalbierungslinien von den Endpunkten B und C der Seite a ausgehen, woraus noch folgt, daß der Punkt D auf Seite BC erhalten wird durch die Halbierungslinie des Außenwinkels der Ecke A.

Man wird bemerken, daß man hier auch Gerade erhalten kann, für welche die Relationen gelten:

$$PP_b = PP_c + PP_a,$$

$$PP_c = PP_a + PP_b.$$

Würde man endlich sämtliche Außenwinkel halbieren, so würden die Schnittpunkte dieser Halbierungslinien mit den Gegenseiten auf einer Geraden liegen; für jeden Punkt dieser Geraden hätte man die Relation $PP_a + PP_b + PP_c = 0$.

Bem. Die Bedingungen für die Punkte E und F sind eingeführt durch $EE_a = EE_c$, $FF_a = FF_b$.

60. Halbiert man in einem Dreieck die innern und äußern Dreieckswinkel, so werden auf den Gegenseiten durch die Winkelhalbierungslinien solche Stücke E_a, E_b, E_c abgeschnitten, für welche mit Berücksichtigung der Zeichenregel die Relation gilt:

$$\frac{1}{E_a}+\frac{1}{E_b}+\frac{1}{E_c}=0.$$

Bew. Soll die Zeichenregel berücksichtigt werden, so müssen die Stücke auf den Seiten diejenigen Zeichen haben, welche übereinstimmen mit den Richtungen, nach welchen der Umfang des Dreiecks kontinuierlich durchlaufen wird, also z. B. mit den Richtungen AB, BC, CA. Berücksichtigen wir nun, daß die Halbierungslinien der Dreieckswinkel, sowohl der innern als der äußern die Gegenseiten nach dem Verhältnis der inliegenden Seiten teilen, dann giebt eine einfache Berechnung:

$$E_a=\frac{2abc}{b^2-c^2},\quad E_b=\frac{2abc}{c^2-a^2},\quad E_c=\frac{2abc}{a^2-b^2},$$

$$\text{also}\quad \frac{1}{E_a}+\frac{1}{E_b}+\frac{1}{E_c}=\frac{1}{2abc}\left\{b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2\right\}=0.$$

Dieser Satz zeigt, wie die Sätze sich durch Einführung der Zeichenregel eleganter und kürzer darstellen lassen.

Man bemerke noch die Sätze:

$$\frac{a^2}{E_a}+\frac{b^2}{E_b}+\frac{c^2}{E_c}=0,$$

$$\frac{a}{E_a}+\frac{b}{E_b}+\frac{c}{E_c}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2abc}.$$

61. Wenn man durch den Schwerpunkt S eines Dreiecks eine Transversale legt, welche die Seiten eines Dreiecks in den Punkten U, V, W schneidet, so findet mit Berücksichtigung der Zeichenregel die Relation statt:

$$\frac{1}{SU}+\frac{1}{SV}+\frac{1}{SW}=0.$$

Bew. (Fig. 39). In der Gleichung steckt die Aussage, daß eine Länge das entgegengesetzte Zeichen der andern haben muß, was aus der Ansicht der Figur übrigens sofort ersichtlich ist. Ist SW diese Länge, so hätte man:

$$-\frac{1}{SW}=\frac{1}{SU}+\frac{1}{SV}\quad\text{oder}\quad\frac{1}{WS}=\frac{1}{SU}+\frac{1}{SV}.$$

Diese Gleichung erinnert an eine harmonische Relation. Bestimmt man nämlich Z so, daß $2\,WS = SZ$ wird, so hätte man:

$$\frac{2}{SZ}=\frac{1}{SU}+\frac{1}{SV},$$

d. h. UV würde durch S und Z harmonisch geteilt. Dies führt uns auf den Gedanken, diese harmonische Relation zu beweisen, oder also diese Relation aus einem entsprechenden harmonischen Gebilde abzuleiten. Wir erhalten nun 4 harmonische Punkte, von denen einer S ist, wenn wir die Schwerlinie AA_0 um sich selbst bis D verlängern; es wird dann AA_0 durch SD harmonisch geteilt. Verbinden wir daher einen Punkt mit diesen Punkten, so erhalten wir 4 harmonische Strahlen; als solcher Punkt empfiehlt sich z. B. V, da wir dadurch die gegebenen Geraden zum Teil erhalten; es ist also $V(AA_0SD)$ harmonisch; dies Büschel lassen wir durch BC schneiden; ist X der Schnittpunkt von VD mit BC, so wird A_0C durch UX harmonisch geteilt, und wenn DC die Transversale SU in Z schneidet, so wird VU durch SZ harmonisch geteilt. Ferner ist $WAS \infty ZDS$, mit dem Ähnlichkeitsverhältnis $\frac{1}{2}$, also $WS = \frac{1}{2} SZ$, woraus der Satz folgt.

62. Wenn man 2 Kreise hat, die sich nicht schneiden, also ein Kreisbüschel mit 2 Grenzpunkten bestimmen, eine Tangente an den einen Kreis zieht, die den andern Kreis schneidet, und einen der Grenzpunkte mit dem Berührungspunkt der Tangente an dem einem Kreise und den Schnittpunkten dieser Linie mit dem andern Kreise verbindet, so wird der Winkel, den die letzten Geraden bilden, durch die erste Verbindungslinie halbiert.

Bew. (Fig. 40). Es seien C und D die beiden Kreise, welche S als einen Grenzpunkt haben, eine Sekante schneide C in E und F, berühre Kreis D in B und schneide die Potenzlinie der Kreise in X. Dann ist $XB^2 = XE \cdot XF$ und der mit XB aus X geschlagene Kreis geht durch S; derselbe möge ferner die Sekante noch in G schneiden, dann folgt aus $XB^2 = XE.XF$, daß EF durch B und G harmonisch geteilt wird. Es ist also S(EFBG) ein harmonisches Büschel. Da $S(BG) = 1\,R$ ist, so müssen die Strahlen SB und SG die Winkel der Strahlen SE und SF halbieren.

Bem. Die Hauptsache ist hier die Benutzung des Punktes X und die Folgerung, daß $XB = XS$ ist, wodurch die Bedingung für S eingeführt wird.

63. Pascalscher Satz. Die Durchschnittspunkte von je 2 gegenüberliegenden Seiten eines Sechseckes, das einem Kreise eingeschrieben ist, liegen in einer Geraden.

Bew. (Fig. 41). Es sei ABCDEF das Sechseck im Kreise, so daß AB und DE ein Gegenseitenpaar mit dem Schnittpunkt P, BC, EF ein zweites Paar mit dem Schnittpunkt R, und CD, FA

das dritte Paar mit dem Schnittpunkt R ist; man soll beweisen, daß die 3 Punkte P, Q, R in einer Geraden liegen. Da der Satz von einem ganz willkürlichen Sechseck handelt, so werden wir uns auf einen allgemeinen Satz zu stützen suchen, der von 3 Punkten einer Geraden handelt, ein solcher Satz ist der Satz des Menelaus. Wir werden daher ein Dreieck suchen, auf dessen Seiten die Punkte P, Q, R liegen. Ein solches erhalten wir in den Seiten des Sechsecks. Um möglichst symmetrisch zu verfahren, werden wir von den 6 Seiten des Sechsecks 3 auswählen, so daß immer je eine Seite ausgelassen wird. Ist also N der Schnittpunkt von AB und CD, L der von CD und EF, M der von EF und AB, so erhalten wir das Dreieck LMN, das wir nun von den andern Seiten des Sechsecks schneiden lassen. Dies giebt:

$$(\alpha)\quad \begin{aligned} \frac{MP}{PN}\cdot\frac{ND}{DL}\cdot\frac{LE}{EM} &= -1,\\ \frac{MA}{AN}\cdot\frac{NQ}{QL}\cdot\frac{LF}{FM} &= -1,\\ \frac{MB}{BN}\cdot\frac{NC}{CL}\cdot\frac{LR}{RM} &= -1, \end{aligned}$$

daraus durch Multiplikation:

$$(\beta)\quad \frac{MP}{PN}\cdot\frac{ND}{DL}\cdot\frac{LE}{EM}\cdot\frac{MA}{AN}\cdot\frac{NQ}{QL}\cdot\frac{LF}{FM}\cdot\frac{MB}{BN}\cdot\frac{NC}{CL}\cdot\frac{LR}{RM} = -1.$$

Wir müssen nun berücksichtigen, daß A, B, C, D, E, F auf einem Kreise liegen; dies giebt:

$$(\gamma)\quad \begin{aligned} LE\,.\,LF &= LD\,.\,LC,\\ MF\,.\,ME &= MA\,.\,MB,\\ NB\,.\,NA &= NC\,.\,ND. \end{aligned}$$

Dadurch geht die Relation (β) über in:

$$(\delta)\quad \frac{MP}{PN}\cdot\frac{NQ}{QL}\cdot\frac{LR}{RM} = -1,$$

woraus folgt, daß P, Q, R in einer Geraden liegen.

Bem. 1. Die Relation (δ) würde sich auch ergeben, wenn nicht die einzelnen Relationen (γ) gelten, sondern eine solche, welche das Produkt der 3 wäre. Daraus läßt sich schließen, daß der Satz in einer allgemeinern Form gültig sein muß. Es läßt sich in der That zeigen, daß der Satz für jedes Sechseck gilt, dessen Ecken auf einem Kegelschnitte liegen.

Bem. 2. Die Reihenfolge der Ecken des Sechsecks darf nicht nur die sein, wie sie durch die Aufeinanderfolge auf der Peripherie angegeben wird. Man kann eine ganz willkürliche Reihenfolge wählen, der Satz, wie auch der Beweis bleibt für alle Fälle bestehen. Man erhält dadurch 60 Sechsecke, so daß 60 solcher Linien vorhanden sind, auf denen die

Schnittpunkte der Gegenseiten liegen. Diese Linien heißen Pascalsche Linien. Dieselben stehen wieder in mancher merkwürdigen Verbindung, auf die hier nicht weiter eingegangen werden kann, da sie für sich ein besonderes Kapitel in Anspruch nehmen würden.

Bem. 3. Der Satz würde besonders auch gelten für ein Sechseck, dessen Ecken auf 2 Geraden liegen, wobei man etwa die geraden Ecken auf der einen, die ungeraden Ecken auf der andern annimmt. Der Beweis ist dem vorigen analog.

64. Der Satz von Brianchon. Die Hauptdiagonalen eines Sechsseits, das einem Kreise umschrieben ist, schneiden sich in einem Punkte.

Bew. Als Hauptdiagonalen werden die Verbindungslinien von solchen Ecken bezeichnet, zwischen denen 2 andere Ecken liegen, wenn man eine bestimmte Reihenfolge festhält. Bezeichnet man die Ecken mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, so sind also die Verbindungslinien 14, 25, 36 die Hauptdiagonalen.

Die Form des Satzes stellt ihn schon als einen reciproken des Pascalschen Satzes dar, es ist also nur zu untersuchen, ob man ihn durch die Anwendung des Princips der Reciprocität (Pol und Polare) beweisen kann. Man erkennt dies aber leicht, wenn man die Berührungspunkte der Tangenten als die Ecken eines Kreissechsecks betrachtet, für welches der Pascalsche Satz gilt. Der Schnittpunkt von 2 Gegenseiten dieses Sechsecks ist offenbar der Pol einer Hauptdiagonale. Da nun jene Schnittpunkte der Gegenseiten in einer Geraden liegen, so müssen die Polaren derselben, welches die Hauptdiagonalen sind, durch einen Punkt gehen, der zugleich der Pol der Pascalschen Geraden ist.

Bem 1. Wie der Pascalsche Satz für jedes Sechseck in einem Kegelschnitt gilt, so auch der Brianchonsche Satz für jedes Sechsseit um einen Kegelschnitt. Es giebt ferner auch hier 60 verschiedene Sechsseite, die man aus einem ableiten kann. Auf den merkwürdigen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Sechsseiten verzichten wir aus denselben Gründen, wie auf den entsprechenden Zusammenhang der Pascalschen Linien. Es sei nur noch erwähnt, daß als ein Sechsseit um einen Kegelschnitt auch ein solches angesehen werden kann, in welchem je 3 Seiten durch einen Punkt gehen.

Bem. 2. Folgerungen aus den Sätzen von Pascal und Brianchon.

Man erhält solche, indem man von dem allgemeinen Fall auf besondere Fälle schließt. Wir erhalten diese, indem wir z. B. beim Sechseck im Kreise eine Seite unendlich klein werden lassen, so daß ein Fünfeck entsteht. Wir finden daraus, daß in einer Geraden liegen: der Schnittpunkt der ersten mit der vierten Seite, der Schnittpunkt der

zweiten mit der fünften Seite, endlich der Schnittpunkt der dritten Seite mit der Tangente an der Gegenecke.

Läßt man 2 Seiten unendlich klein werden, so erhält man ein Viereck im Kreise (Kegelschnitt). Dies giebt den Satz: Die Schnittpunkte der Gegenseiten und die Schnittpunkte der Tangenten an den Gegenecken liegen in einer Geraden.

Läßt man endlich 3 Seiten unendlich klein werden, so erhält man den Satz: In jedem Dreieck liegen der Schnittpunkt der Seiten mit den Tangenten an den Gegenecken am Umkreise in einer Geraden.

Zu diesen Sätzen kann man ebenso die speciellen Fälle des Satzes von Brianchon bilden. Der entsprechende des letzten Satzes würde lauten: Die Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den Berührungspunkten des Inkreises auf den Gegenseiten schneiden sich in einem Punkte.

65. Der Feuerbachsche Kreis eines Dreiecks berührt den Inkreis und die Ankreise.

Bew. (Fig. 42). Es sei ABC das Dreieck, A_0, B_0, C_0 die Mittelpunkte der Seiten, D der Berührungspunkt des Inkreises, E der vom Ankreise auf BC, so daß $DA_0 = A_0E$ ist, ferner G der Höhenfußpunkt und J der Schnittpunkt der Winkelhalbierungslinie mit derselben Seite, endlich L der Höhenfußpunkt auf AC; O und O′ die Mittelpunkte des Inkreises und des zu BC gehörigen Ankreises. Man nehme DE als Durchmesser eines Kreises, in Bezug auf welchen wir die Figur nach dem Princip der reciproken Radien transformieren wollen. Da dieser Kreis den Inkreis, auch den Ankreis O′ rechtwinklig schneidet, so bleiben dieselben dadurch ungeändert. Da A_0 der Mittelpunkt des Transformationskreises ist und der Feuerbachsche Kreis durch A_0 geht, so wird dieser in eine Gerade transformiert; diese Gerade geht durch J als den reciproken Punkt von G, denn $A_0D^2 = A_0J \cdot A_0G$. Es ist ferner $B_0(GA_0)$ gleich der Differenz der Winkel an den Ecken B und C, was leicht gefunden werden kann. Da also der Feuerbachsche Kreis die Seite BC unter der Differenz dieser Winkel schneidet, so muß auch die reciproke Gerade dies thun; eine solche Gerade erhalten wir, wenn wir AC auf AB und AB auf AC auftragen, wodurch wir die Punkte C′ und B′ erhalten. Daß diese Gerade durch J geht, ist klar, da bei diesem Umlegen die Winkelhalbierungslinie unverändert bleibt. Daher ist diese Gerade die reciproke Linie des Feuerbachschen Kreises. Daß diese die beiden Kreise O und O′ berührt, folgt aus Symmetriegründen. Damit aber ist der Satz bewiesen. Die reciproken Punkte der Berührungspunkte der Geraden sind natürlich die

Berührungspunkte der Berührungskreise des Dreiecks mit dem Feuerbachschen Kreise.

Bem. Dieser Satz soll die Anwendung des Princips der reciproken Radien zeigen.

b) Die Simsonsche Gerade.

Als Simsonsche Gerade eines Dreiecks wird die Linie bezeichnet, auf der die Fußpunkte der Lote von einem Punkte der Peripherie auf die Seiten liegen. Auf den Beweis dieses Satzes, welcher mit ganz elementaren Hilfsmitteln oder auch mittelst des Satzes von Menelaus geführt werden kann, sei hier verzichtet.

66. Verbindet man einen Punkt der Peripherie des Umkreises eines Dreiecks mit den Ecken und bestimmt die Gegentransversalen der Verbindungslinien, so sind dieselben parallel.

Bew. (Fig. 43). Zunächst kann man in betreff der Aussagen eine Umkehr eintreten lassen, in der Weise: Zieht man durch die Ecken eines Dreiecks irgend welche Parallele und bestimmt die Gegentransversalen, so schneiden sich dieselben auf dem Umkreise. — Es mögen nun die Parallelen durch A, B, C den Umkreis in Q, R, S schneiden; schneidet die Gegentransversale von AQ den Umkreis in P, so ist arc BQ = arc CP; nun ist arc AR = arc BQ, also arc AR = arc CP, daher BP und BR Gegentransversalen, so daß die Gegentransversale an der Ecke B ebenfalls durch P geht. Daß CP und CS Gegentransversalen sind, läßt sich ebenso beweisen, folgt aber auch aus dem Satze des Ceva.

Bem. Dieser Satz zeigt eine Abhängigkeit der Richtungen der Ebene von den Punkten der Peripherie eines Kreises.

67. Die Simsonsche Linie eines Punktes des Umkreises ist senkrecht zur Richtung, welche die Gegentransversalen der durch den Punkt gezogenen Ecktransversalen haben.

Bew. (Fig. 44). ABC sei das Dreieck, P der Punkt auf der Peripherie, welcher die Simsonsche Linie $P_1P_2P_3$ bestimmt. Verlängert man PP_1 bis zum Umkreise in U und verbindet A mit U, so läßt sich zeigen, daß $AU \parallel P_1P_2$ ist. Es ist $P(P_1C) = P_2(P_1C)$, auch $P(P_1C) = A(UC)$, also $P_2(P_1C) = A(UC)$. Ist dann AQ Gegentransversale zu AP an der Ecke A, so ist $A(BQ) = A(PC) = U(PC)$. Da $C(BU) = A(BU)$ ist, so folgt durch Addition $A(QU) = U(PC) + C(BU) = 90^0$. Es ist also $AQ \perp AU$, also auch $AQ \perp P_1P_2P_3$.

68. Verbindet man einen Peripheriepunkt P des Umkreises eines Dreiecks mit dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks, so wird diese Strecke durch die dem Punkte angehörige Simsonsche Linie halbiert.

Bew. (Fig. 44). Die Bezeichnung wie vorher in Nr. 67; der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ist H. Wie in vielen andern Fällen,

kehren wir Bedingung und Folgerung um. Wir ziehen HP, halbieren HP in D und zeigen, daß die Verbindungslinie von D mit dem Fußpunkte des Lotes von P auf eine Seite die Simsonsche Gerade ist. Zunächst kann man die Folgerung ziehen, daß D auf dem Feuerbachschen Kreise liegt. H ist nämlich der äußere Ähnlichkeitspunkt zwischen dem Umkreise und dem Feuerbachschen Kreise, deren Ähnlichkeitsverhältnis 2 ist, d. h. alle von H ausgehenden Strahlenstücke bis zum Umkreise werden durch den Feuerbachschen Kreis halbiert. Verbindet man alsdann D mit dem Fußpunkte G der Höhe AG auf BC und mit dem Fußpunkte P_1 von P auf BC, so ist DGP_1 gleichschenklig. Da also $G(DP_1) = P_1(DG)$, so auch $G(HD) = P_1(DP)$. Ist nun E der Mittelpunkt von AH und zieht man DE, so ist $DE = \frac{1}{2}AP$. ED ist eine Sehne im Feuerbachschen Kreise und da es die Hälfte von AP ist, so gehört zu ihr ein ebenso großer Peripheriewinkel im Feuerbachschen Kreise als im Umkreise zu AP. Es ist also $G(ED) = C(AP)$. Da nun $G(ED) = P_1(DP)$, so folgt auch $C(AP) = P_1(DP)$. Es schneide nun DP_1 die Gerade AC in P_2, so ist $C(P_2P) = P_1(DP)$ oder $C(P_2P) = P_1(P_2P)$, also liegen PP_2P_1C auf einem Kreise und somit $P_2(PC) = P_1(PC) = 1R$, also P_2 der Fußpunkt von P auf AC, d. h. P_1P_2 die Simsonsche Gerade.

69. Sind 2 Punkte die Endpunkte eines Durchmessers des Umkreises, so sind die zugehörigen Simsonschen Linien senkrecht zu einander.

Bew. Die Bezeichnung wie vorher (Fig. 44), ferner V der zweite Endpunkt des Durchmessers, von dem P der eine ist. Dann ist $U(VP) = 1R$, also $UV \parallel BC$. Da nach Nr. 67 UQ ein Durchmesser ist, so geht also das Lot VV_1 von V auf BC durch Q. Nach Nr. 67 ist auch die Simsonsche Linie zu V parallel zu AQ, also senkrecht zu AU oder $P_1P_2P_3$.

70. Der Schnittpunkt von 2 Simsonschen Linien, deren Peripheriepunkte die Endpunkte eines Durchmessers sind, liegt auf dem Feuerbachschen Kreise.

Bew. Die Bezeichnung wie früher (Fig. 44). Es sei noch J der Mittelpunkt von HV und M der Mittelpunkt des Umkreises. J liegt auf dem Feuerbachschen Kreise und auf der Simsonschen Linie von V, analog dem Punkte D. Betrachten wir Dreieck HVP, so sind J und D die Mittelpunkte von HV und HP, also halbiert JD alle Geraden von H nach VP, also auch HM, da M auf VP liegt. Der Mittelpunkt von HM ist der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises; es ist also JD ein Durchmesser desselben. Ist nun K der Schnittpunkt der

zu V und P gehörigen Simsonschen Linien, so ist (Nr. 69) K(JD) = 1R, also liegt K auf dem Kreise über JD als Durchmesser, d. h. auf dem Feuerbachschen Kreise.

c) Das vollständige Vierseit.

Durch 4 Gerade in allgemeiner Lage wird ein vollständiges Vierseit bestimmt, das also, wie der Name besagt, 4 Seiten hat. Vier Gerade geben nun 4 Kombinationen zu je 3, daher enthält das vollständige Vierseit 4 Dreiecke. Kombinationen zu je 2 Seiten giebt es 6; daher hat das vollständige Vierseit 6 Ecken, die man paarweise gegenüberstellen kann. Die Gegenecke einer Ecke wird durch die Seiten bestimmt, welche der ersten fehlen. Die Verbindungslinien der Gegenecken heißen Diagonalen, deren also 3 vorhanden sind. Bekannt ist die Eigenschaft des vollständigen Vierseits, daß sich die Diagonalen gegenseitig harmonisch teilen.

71. Die Mittelpunkte der Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in einer Geraden.

Bew. (Fig. 45). Da ein vollständiges Vierseit eine sehr allgemeine Figur ist, so wird man die genannte Beziehung auf einen allgemeinen Satz zurückführen. Ein solcher ist der Satz des Menelaus; wonach 3 Punkte auf den Seiten eines Dreiecks in einer Geraden liegen, wenn das Tripelverhältnis der Punkte in Bezug auf die Seiten desselben Dreiecks den Wert -1 hat. Wir werden daher ein Dreieck suchen, auf dessen Seiten diese Mittelpunkte der Diagonalen liegen. Die Ecken des Dreiecks seien mit A, A', B, B', C, C' bezeichnet, so daß die Ecken mit gleichen Buchstaben Gegenecken sind und A', B', C' in einer Geraden liegen, die Mittelpunkte AA', BB', CC' seien bez. L, M, N, die Mittelpunkte von BC, CA, AB bez. A_0, B_0, C_0. Von A gehen nun die Strecken AB, AC, AA' aus, deren Endpunkte auf einer Geraden liegen, also ist dies mit den Mittelpunkten der Strecken, mit C_0, B_0, L der Fall; demnach liegt L auf C_0B_0, ebenso M auf C_0A_0, N auf B_0A_0. Es ist also das Tripelverhältnis der Punkte L, M, N in Bezug auf dieses Dreieck festzustellen. Nun ist

$$\frac{BA' \cdot CB' \cdot AC'}{A'C \cdot B'A \cdot C'B} = -1;$$

$$2C_0L = BA',\ 2A_0M = CB',\ 2B_0N = AC',$$
$$2LB_0 = A'C,\ 2MC_0 = B'A,\ 2NA_0 = C'B;$$

$$\text{daher auch } \frac{C_0L \cdot A_0M \cdot B_0N}{LB_0 \cdot MC_0 \cdot NA_0} = -1.$$

72. Die Kreise um die 4 Dreiecke eines vollständigen Vierseits schneiden sich in einem Punkte.

Bew. (Fig. 46). Die Bezeichnung der Ecken des vollständigen Vierseits sei wie in Nr. 71, Fig. 45. Die Kreise um ABC und A'B'C mögen sich in P schneiden; dann ist zu beweisen, daß A'BPC', AB'PC' Kreisvierecke sind, doch genügt natürlich der Beweis von einem Viereck. Es ist nun

$$P(A'C) = B'(AC'),\ P(CB) = A(CB).$$

Hieraus folgt durch Addition:

$$P(A'B) = B'(AC') + A(CB) = 180^0 - C'(BA') \text{ oder}$$
$$P(A'B) + C'(A'B) = 180^0.$$

Das Wesentliche am Beweise ist, an dem Punkte P 2 Winkel zu bestimmen, die zusammen einen Winkel bilden, während die entsprechenden gleichen Winkel 2 Winkel desselben Dreiecks sind. Die Bedingungen der Figur sind eingeführt, indem man den Satz benutzt, daß die Summe der Winkel eines Dreiecks 180^0 beträgt.

73. Die Mittelpunkte der Umkreise von den Dreiecken eines vollständigen Vierseits liegen auf einem Kreise, der auch den Schnittpunkt jener Umkreise enthält.

Bew. (Fig. 46). Die Bezeichnung wie in Nr. 72, es seien aber noch D, E, F, G die Mittelpunkte der Umkreise von den Dreiecken ABC, AB'C', A'BC', A'B'C. Dann ist $EG \perp B'P$, $DG \perp CP$, da die Punkte E und G Mittelpunkte von Kreisen sind, welche beide durch B' und P gehen, D und G aber die Mittelpunkte von Kreisen durch C und P. Es ist daher

$$G(ED) = P(CB') = A'(BC').$$

Ebenso folgt, daß $FE \perp C'P$, $FD \perp BP$, also

$$F(ED) = P(C'B) = A'(BC').$$

Somit liegen D, E, F, G auf einem Kreise. Es ist ferner

$$P(AD) = 90^0 - B(AP),\ P(AE) = 90^0 - C'(AP), \text{ also}$$
$$P(DE) = C'(AP) - B(AP) = P(BC') = A'(BC'), \text{ also liegt}$$

auch P auf demselben Kreise.

74. Weitere Folgerungen des Satzes Nr. 73.

Man ziehe (Fig. 46) AE und BF, die sich in H (hier so, daß AEH, BHF die Reihenfolge ist) schneiden. Nun ist

$$H(BE) = B(FC') - A(BE) = 90^0 - A'(BC') - \{90^0 - B'(C'A)\}$$
$$= B'(C'A) - A'(BC') = C(B'A').$$

Ferner $P(EF) = P(EC') + P(C'F)$
$= 90^0 - A(C'P) + 90^0 - A'(PC')$
$= 180^0 - (A(C'P) + A'(PC'))$
$= 180^0 - 360^0 + C'(BA') + P(AA')$
$= C'(BA') + P(AB) + P(BA') - 180^0$
$= C'(BA') + C(AB) - C'(BA')$
$= C(AB).$

Daher liegen EHFP auf einem Kreise oder AE, BF und, wie sich ebenso zeigen läßt, CG schneiden sich in einem Punkte des Kreises, der durch die Mittelpunkte der Umkreise der 4 Dreiecke geht, welche das vollständige Vierseit enthält.

Ferner ist $B(HC) = 90^0 - C'(BA')$, $A(HC) = 90^0 - C'(BA')$, also $B(HC) = A(HC)$, d. h. die Punkte ABCH liegen auf einem Kreise, so daß H der Schnittpunkt des vorher angegebenen Kreises mit dem Umkreise von ABC ist.

Dieser Kreis schneidet die Umkreise der Dreiecke außer in P noch in einem Punkte, der als zugeordneter Punkt von P dem betreffenden Dreiecke angehörig bezeichnet werde. Wir erhalten dann den Satz: Jeder zugeordnete Punkt eines Dreiecks des vollständigen Vierseits liegt mit einer Ecke und dem Mittelpunkt des Umkreises von dem Dreieck, das außer der Ecke noch die Gegenecken des ersten Dreiecks enthält, in einer Geraden. Zur bessern Orientierung sei also bemerkt: Der zum Dreieck ABC zugehörige Punkt ist H, das Dreieck, welches außer A noch die Gegenecken dieses enthält, ist AB'C', der Mittelpunkt des Umkreises E, also liegen AEH in einer Geraden; ebenso BHF, GCH.

75. Die Kreise, deren Durchmesser die Diagonalen eines vollständigen Vierseits sind, gehören zu einer Schar.

Satz von Bodenmiller.

Bew. (Fig. 45). Kreise, welche 2 Kreise rechtwinklig schneiden, gehören einer Schar an. Liegen die Mittelpunkte von Kreisen auf einer Geraden, so gehören sie einer Schar an, wenn sie nur noch einen Kreis rechtwinklig schneiden, es kann nämlich die Gerade, auf welcher die Mittelpunkte liegen, als Kreis mit unendlich großem Radius angesehen werden. Wir haben hier also, da wir wissen, daß die Mittelpunkte in einer Geraden liegen, nur noch einen Kreis zu suchen, der die betreffenden Kreise rechtwinklig schneidet. Als solcher bietet sich am natürlichsten der dar, welcher durch die Schnittpunkte der Diagonalen geht. Sind P, Q, R d. h. die Schnittpunkte von BB' und CC', von CC' und AA', von AA' und BB' die Diagonalenschnittpunkte, so ist bekannt, daß AA' durch Q und R, BB' durch R und P, CC' durch P und Q harmonisch

geteilt wird. Daraus folgt aber, daß der Umkreis von PQR die Kreise über AA', BB', CC' als Durchmesser rechtwinklig schneidet. Dabei sei noch bemerkt, daß die Schar erster, auch zweiter Art sein kann, d. h. daß die Kreise sich in 2 Punkten schneiden können, sich aber auch gar nicht schneiden dürfen.

76. Die Höhenschnittpunkte der 4 Dreiecke, welche ein vollständiges Vierseit enthält, liegen in einer Geraden.

Bew. 1 (Fig. 47). Der Beweis dieses Satzes schließt sich an den vorigen Satz an. In diesem Satze haben wir Kreise, die zu einer Schar gehören. Es liegt daher die Frage nahe, welches ist die Potenzlinie jener Kreise? Man erhält dieselbe, wenn man Punkte bestimmt, welche gleiche Potenz in Bezug auf jene Kreise haben. Die Ecken der Dreiecke seien wieder wie vorher mit A, B, C, A', B', C' bezeichnet, ferner H_0 der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks ABC und X, Y, Z die Höhenfußpunkte dieses Dreiecks, dann ist $H_0A \,.\, H_0X = H_0B \,.\, H_0Y$. Da nun der Kreis über AA' als Durchmesser durch A und X, der über BB' als Durchmesser durch B und Y geht, so hat H_0 für beide Kreise gleiche Potenzen, oder, da die 3 Kreise über den 3 Diagonalen einer Schar angehören, für alle 3 Kreise. Dasselbe läßt sich von den andern Höhenschnittpunkten, nämlich H_1 von AB'C', H_2 von A'BC', H_3 von A'B'C beweisen. Sind z. B. G und L die Höhenfußpunkte von C' und B in A'BC', so folgt leicht $H_2B \cdot H_2L = H_2C' \cdot H_2G$. Diese Produkte sind aber die Potenzen von H_2 in Bezug auf die Kreise über BB' und CC'. Demnach liegen die 4 Höhenschnittpunkte auf der Potenzlinie der Kreisschar, deren Durchmesser die Diagonalen sind. Diese Potenzlinie ist demnach senkrecht zur Centrale jener, die man als Mediane des vollständigen Vierseits bezeichnet.

Bem. Der Kernpunkt des Beweises liegt in der Benutzung der Eigenschaft des Höhenschnittpunktes, daß die Produkte der Stücke der Höhen vom Schnittpunkt bis zur Ecke und dem Fußpunkt konstant sind.

Bew. 2. Es wird gut sein, noch einen Beweis zu geben, der von dem Satze in Nr. 75 unabhängig ist, um andere Methoden kennen zu lernen. Wir ziehen hier (Fig. 47) als Hilfslinie $B'D \parallel CB$, wo D der Schnittpunkt mit AB ist. Dreieck AB'D habe nun K als Höhenschnittpunkt, dann liegen B', H_1, K in einer Geraden; denn H_1 liegt in dem Lote von B' auf AB, ebenso K. Ferner liegen AH_0K auf einer Geraden; denn da ABC und ADB' ähnliche Dreiecke in ähnlicher Lage mit dem Ähnlichkeitspunkte A sind, so müssen auch die entsprechenden Punkte H_0 und K mit A in einer Geraden liegen. Man wird dann erkennen, daß der Satz bewiesen ist, wenn man die Richtigkeit der Relation gezeigt hat:

$$B'H_1 : H_1K = B'H_3 : KH_0;$$

denn wenn 3 Höhenschnittpunkte in einer Geraden liegen, so folgt von selbst, daß der vierte auf derselben Geraden liegen muß.

Es treffe nun $A'H_3$ die Seite AC in Q und $C'H_1$ dieselbe Gerade in N, dann ist $H_1N \parallel A'Q$, also ist $A'B' : B'C' = B'Q : NB'$; aber auch $A'B' : B'C' = BD : DC' = YD_0 : D_0N$, wo D_0 der Fußpunkt des Lotes von D auf AC ist. Aus jenen Proportionen folgt:

$$B'Q : B'N = YD_0 : D_0N \text{ oder } B'Q : YD_0 = B'N : D_0N.$$

Nun sind B'Q und YD_0 die Projektionen von $B'H_3$ und H_0K, welche Strecken auf Geraden liegen, die einander parallel sind. Daher ist $B'Q : YD_0 = B'H_3 : H_0K$, und also

$$B'N : D_0N = B'H_3 : H_0K, \text{ oder endlich auch:}$$
$$B'H_1 : H_1K = B'H_3 : H_0K.$$

d) Sätze über Vierecke verschiedener Art.

Geht man von 4 Punkten aus und bestimmt einen cyklischen Geradenzug, so daß jeder Punkt durch den Geradenzug nur einmal durchlaufen wird, so erhält man ein einfaches Viereck. Der einfachste und daher wichtigste Fall ist der, wenn durch den Geradenzug eine Fläche bestimmt wird; die dadurch entstehende Figur wurde im Altertum vorzugsweise als Viereck bezeichnet.

Für die Lage der Ecken, dann auch der verbindenden Geraden, welche die Seiten des Vierecks sind, können noch besondere Bedingungen bestehen, wodurch Vierecke von besonderm Charakter entstehen. Liegen die Ecken auf einem Kreise, so heißt das Viereck Kreisviereck, auch wird dasselbe als ein nach den Ecken centrisches Viereck bezeichnet. Läßt sich ein Kreis zeichnen, der die 4 Seiten des Vierecks berührt, so erhält man ein Viereck um den Kreis, das auch als ein nach den Seiten centrisches Viereck bezeichnet wird. Hierbei kann der Kreis außerhalb der Fläche liegen oder innerhalb. In der theoretischen Behandlung der betreffenden Sätze, soweit es sich um Lagenbeziehungen handelt, wird keine Verschiedenheit stattfinden. Nicht ohne Interesse wird es sein, das Viereck zu betrachten, welches nach den Ecken und Seiten zugleich centrisch ist. — Für die Lage der Ecken eines Kreisvierecks kann ferner noch eine Bedingung gegeben sein. Eine solche ist die, daß die eine Diagonale durch den Pol der andern geht. Man nennt das Viereck dann ein harmonisches. Ebenso könnte man natürlich ein nach den Seiten centrisches Viereck betrachten, bei denen der Schnittpunkt von 2 Gegenseiten auf der Polare des Schnittpunktes der beiden andern Seiten liegt; doch erhält man hier weniger elementare Eigenschaften. Bekannt ist der Satz vom Viereck um den Kreis, daß die Summe von 2 Gegenseiten gleich

der Summe der beiden andern ist. Hat man ein gewöhnliches Viereck, dessen Seiten in der Verlängerung von einem Kreise berührt werden, so tritt die Differenz statt der Summe ein. Vom Kreisviereck ist bekannt, daß die Summe der Gegenwinkel 180° beträgt, ebenso der Satz des Ptolemäus, von dem eine kleine Erweiterung nicht ohne Interesse ist.

77. Der Inhalt des Kreisvierecks mit den Seiten a, b, c, d ist durch den Ausdruck $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ gegeben, wo $2p = a+b+c+d$ gesetzt ist.

Bew. (Fig. 48). Das Viereck sei ABCD. Man kann den Inhalt desselben bestimmen, indem man es in 2 Dreiecke zerlegt und diese zu bestimmen sucht, wobei natürlich alle Hilfsgrößen durch die Seiten schließlich auszudrücken sind. Besser jedoch ist die Darstellung als Differenz. Schneiden sich nämlich AD und BC in E, so stellt sich ABCD als Differenz der Dreiecke ABE und CDE dar, welche einander ähnlich sind, so daß man durch das eine Dreieck leicht das andere erhält. Setzen wir $CE = x$, $DE = y$, so ist

$$4 \cdot CDE = \sqrt{(x+y+c)(x+y-c)(c+x-y)(c-x+y)}.$$

Man erhält ferner leicht die Proportionen:

$$x : c = y + d : a,$$
$$y : c = x + b : a.$$

Hieraus $(a^2 - c^2)\,x = c(ad + bc)$,
$(a^2 - c^2)\,y = c(ab + cd)$,

also $x + y + c = \frac{c(a+c)}{a^2-c^2}(a+b+d-c) = \frac{c}{a-c}(a+b+d-c)$,

$x + y - c = \frac{c(a+c)}{a^2-c^2}(b+c+d-a) = \frac{c}{a-c}(b+c+d-a)$,

ebenso leicht $c + x - y = \frac{c}{a+c}(a+c+d-b)$,

$$c - x + y = \frac{c}{a+c}(a+b+c-d).$$

Somit ist $4.\,CDE =$

$$\frac{c^2}{(a^2-c^2)}\sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}.$$

$$CDE = \frac{c^2}{a^2-c^2}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Da $CDE : ABE = c^2 : a^2$, so hat man:

$$ABE = \frac{a^2}{a^2-c^2}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$ also

$$ABE - CDE = ABCD = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

78. Der Inhalt J eines Vierecks mit den Seiten a, b, c, d, wobei die Summe von 2 Gegenwinkeln 2ω beträgt, wird durch die Formel gegeben:

$$J^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\omega.$$

Man sieht hier sofort, daß diese Formel die über den Inhalt des Kreisvierecks verallgemeinert.

Bew. Die Bezeichnung ist die gewöhnliche, so daß $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $a+b+c+d = 2p$ gesetzt ist.

Setzt man $B(AC) = 2\vartheta$, so hat man zunächst:

$$J = ab\sin\vartheta\cos\vartheta + cd\sin(\omega-\vartheta)\cos(\omega-\vartheta);$$
$$a^2+b^2-2ab\cos 2\vartheta = c^2+d^2-2cd\cos(2\omega-2\vartheta).$$

Hieraus folgt:

$$(a+b)^2 - 4ab\cos^2\vartheta = (c-d)^2 + 4cd\sin^2(\omega-\vartheta),$$
$$(a+b)^2 - (c-d)^2 = 4ab\cos^2\vartheta + 4cd\sin^2(\omega-\vartheta),$$
$$\text{d. h. } (p-c)(p-d) = ab\cos^2\vartheta + cd\sin^2(\omega-\vartheta).$$

Man wird ebenso ableiten:

$$(p-a)(p-b) = ab\sin^2\vartheta + cd\cos^2(\omega-\vartheta),$$

also

$$\begin{aligned}(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) &= a^2b^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta + c^2d^2\sin^2(\omega-\vartheta)\\ &\quad \cos^2(\omega-\vartheta) + abcd\,(\sin^2\vartheta\\ &\quad \sin^2(\omega-\vartheta) + \cos^2\vartheta\cos^2(\omega-\vartheta))\\ &= \{ab\sin\vartheta\cos\vartheta + cd\sin(\omega-\vartheta)\\ &\quad \cos(\omega-\vartheta)\}^2 + abcd\{\sin^2\vartheta\\ &\quad \sin^2(\omega-\vartheta) - 2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin(\omega-\vartheta)\\ &\quad \cos(\omega-\vartheta) + \cos^2\vartheta\cos^2(\omega-\vartheta)\}\\ &= J^2 + abcd\,(\sin\vartheta\sin(\omega-\vartheta) - \cos\vartheta\\ &\qquad \cos(\omega-\vartheta))^2\\ &= J^2 + abcd\cos^2\omega,\end{aligned}$$

oder also $J^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\omega$.

Bem. Diese Formel ergiebt noch, daß das größte Viereck, welches mit 4 gegebenen Seiten konstruiert werden kann, dasjenige ist, um welches ein Kreis gelegt werden kann.

79. Die 3 Diagonalen eines Kreisvierecks.

Die 4 Seiten eines Kreisvierecks bestimmen dasselbe vollständig. Denken wir uns die Reihenfolge der Seiten geändert, so wird zwar die Gestalt, aber nicht der Inhalt geändert, vorausgesetzt, daß man stets ein konvexes Viereck behält, da durch Sehnen von gleicher Größe stets Kreisabschnitte von gleicher Größe abgeschnitten werden. Um die Anzahl der verschiedenen Vierecke festzustellen, können wir eine Seite als die erste festhalten und die Reihen-

folge der andern ändern. Wir erhalten dann für die Seiten a, b, c, d folgende Vierecke:

abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb.

Nun ist klar, daß abcd und adcb, abdc und acdb, acbd und adbc dieselben Vierecke sind, da die zweiten Vierecke die Seiten nur in umgekehrter Reihenfolge geben. Es bleiben also übrig als verschieden:

abcd, acbd, abdc.

Es habe nun (Fig. 48) abcd mit den Ecken A, B, C, D die Diagonalen AC = e, BD = f, acbd mit den Ecken ABC'D die Diagonalen AC' = g, BD = f; endlich habe abdc die Ecken ABCD', dann ist hier die eine Diagonale AC = e, die andere BD' ist dann g, da AC' und BD' denselben Bogen abschneiden, nämlich die Summe der Bogen, die zu den Sehnen a und c gehören. Wir finden also, daß 4 Seiten eines Kreisvierecks 3 verschiedene Kreisvierecke bestimmen; dazu gehören 3 verschiedene Diagonalen, von denen immer je 2 zu einem Viereck gehören.

80. Der Inhalt eines Kreisvierecks, das durch 4 Seiten bestimmt ist, ist gleich dem Produkt der Diagonalen dividiert durch den vierfachen Radius.

Bew. (Fig. 48). Benutzt man den Satz, daß der Inhalt eines Dreiecks gleich dem Produkt der Seiten dividiert durch den vierfachen Radius des Umkreises ist, so erhält man für den Inhalt J eines Kreisvierecks, dessen Seiten a, b, c, d und dessen 3 Diagonalen e, f, g sind, die Formel:

$$J = \frac{f(ad+bc)}{4r} = \frac{g(ac+bd)}{4r} = \frac{e(ab+cd)}{4r},$$

wo e zur Reihenfolge a, b, c, d; f zur Reihenfolge a, d, b, c; und g zur Reihenfolge a, c, b, d gehört. Es ist aber auch $ef = ac + bd$ nach dem Satze von Ptolemäus, also $J = \frac{efg}{4r}$.

Man erhält aus jenen Formeln für den Inhalt noch:

$$\frac{f}{g} = \frac{ac+bd}{ad+bc}, \quad \frac{g}{e} = \frac{ab+cd}{ac+bd}, \quad \frac{e}{f} = \frac{ad+bc}{ab+cd},$$

d. h. 2 Diagonalen verhalten sich wie die Summe der Produkte der Seiten, die an den Endpunkten zusammenstoßen. Da noch $ef = ac + bd$ ist, so findet man

$$e^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}, \text{ ebenso } f^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+be},$$

$$g^2 = \frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(ac+bd)}.$$

81. Ist ein Viereck zugleich nach den Seiten und Ecken centrisch, so wird jede Seite durch den Berührungspunkt des Inkreises nach dem Verhältnis der anstoßenden Seiten geteilt.

Bew. (Fig. 49). Das Viereck sei ABCD, F der Berührungspunkt des Inkreises auf AB, G der von BC, H der von CD, und J der von DA. Die Diagonalen AC und BD, sowie die Verbindungslinien der Berührungspunkte der Gegenseiten schneiden sich in einem Punkte S nach einem Satze, der leicht aus den Sätzen von Pol und Polare folgt. Ferner ist D(JS) = C(GS), J(DS) = G(CS), also SJE ∞ SGC, also JD : GC = SD : SC.

Dann sind auch die Dreiecke ASD und BSC ähnlich, also SD : SC = AD : BC, also JD : GC = AD : BC und auch DH : HC = DA : CB.

82. Die Verbindungslinien der Berührungspunkte des Inkreises auf den Gegenseiten halbieren die Winkel der Diagonalen und die Geraden sind senkrecht zu einander.

Bew. (Fig. 49). Bezeichnung wie in Nr. 81. Es ist DJS ∞ CGS, also S(JD) = S(CG) = S (AJ).

Ebenso halbiert natürlich SD den Winkel S(AB). Die Halbierungslinien von Nebenwinkeln stehen aber aufeinander senkrecht.

Bem. Eine andere, aber fast selbstverständliche Folgerung ist noch, daß die Mittelpunkte der beiden Kreise, des Inkreises und des Umkreises mit dem Schnittpunkt der beiden Diagonalen in einer Geraden liegen. Bestimmt man nämlich die Schnittpunkte P von AD mit BC und Q von AB mit CD, so ist PQ Polare von S in Bezug auf beide Kreise; die Verbindungslinien von S mit den Mittelpunkten müssen also zu PQ senkrecht sein.

83. Sind a, b, c, d die Seiten eines nach den Ecken und Seiten centrischen Vierecks, so ist der Inhalt J desselben durch die Gleichung gegeben:

$$J = \sqrt{abcd}.$$

Bew. (Fig. 49). Die Bezeichnung wie vorher; ferner werde AB = a durch den Berührungspunkt F in a_1 und a_2, BD = b durch G in b_1 und b_2, CD = c durch H in c_1 und c_2, DA = d durch J in d_1 und d_2 geteilt, auch sei $a + b + c + d = 2\lambda$. Da nun $a_2 = b_1$, $b_2 = c_1$, $c_2 = d_1$, $d_2 = a_1$ ist, so folgt $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = \lambda$. Nun ist

$$a_1 : a_2 = d : b, \text{ also } a_1 : a = d : b + d = d : \lambda,$$

also $a_1 = \frac{ad}{\lambda}$, ebenso $b_1 = \frac{ba}{\lambda}$, $c_1 = \frac{cb}{\lambda}$, $d_1 = \frac{dc}{\lambda}$, ebenso

$$a_2 = \frac{ab}{\lambda},\ b_2 = \frac{bc}{\lambda},\ c_2 = \frac{cd}{\lambda},\ d_2 = \frac{da}{\lambda}.$$

Daraus $a_1c_1 = b_1d_1 = a_2c_2 = b_2d_2$.

Der Inhalt des Vierecks ist nun, wenn ρ der Radius des Inkreises ist, $J = \frac{\rho}{2}(a+b+c+d) = \rho\lambda$.

Ist M der Mittelpunkt des Inkreises, so ist $MAF \sim CMH$, was aus der Betrachtung der Winkel folgt; daraus folgt:

$$AF : \rho = \rho : CH, \text{ oder}$$

$$\rho^2 = a_1c_1 = \frac{abcd}{\lambda^2}.$$

Es folgt also $\rho^2\lambda^2 = abcd$ oder $\rho\lambda = J = \sqrt{abcd}$.

84. Verbindet man einen beliebigen Punkt eines Kreises mit den Ecken eines in denselben hineingezeichneten harmonischen Vierecks, so erhält man damit 4 harmonische Strahlen.

Bew. (Fig. 50). Es sei ABCD ein harmonisches Kreisviereck und P ein Punkt der Peripherie des Umkreises. Verbindet man zunächst B mit den Ecken A, C, D und mit dem Pol L von BD, so erhält man bei B 4 Strahlen, von welchen BL Tangente an den Umkreis ist, da die zu einem Punkte gehörige Berührungssehne die Polare des betreffenden Punktes ist. Nach dem Fundamentalsatze von Pol und Polare treffen diese Strahlen die Diagonale AC in 4 harmonischen Punkten, also sind die 4 Strahlen bei B harmonisch. Verbindet man alsdann P mit A, B, C, D, so erhält man bei P 4 Strahlen, welche Winkel miteinander bilden, die denen der Strahlen bei B gleich sind; also sind auch diese Strahlen harmonisch.

In welcher Weise die Bedingungen benutzt sind, bedarf keiner weitern Erwähnung.

85. Im harmonischen Viereck sind die Produkte der Gegenseiten gleich.

Bew. Die Bezeichnung sei wie vorher (Nr. 84); ABCD das Viereck, L der Pol von BD, $LBC \sim LAB$, $LDC \sim LAD$, also

$$BC : AB = LB : LA; \text{ ebenso}$$

$$CD : AD = LD : LA.$$

Da $LD = LB$ ist, so folgt:

$$BC : AB = CD : AD, \text{ oder } BC \cdot AD = AB \cdot CD.$$

Bem. Liegen 4 Punkte auf einer Geraden in der Reihenfolge ABCD, so sind dieselben bekanntlich harmonisch, wenn die Relation gilt $BC \cdot AD = AB \cdot CD$, so daß unser Satz als eine Erweiterung der Grundbedingungen für harmonische Punkte gelten kann. Wir können diese 4 Punkte auf einem Kreise ebenfalls als harmonische bezeichnen.

86. Zieht man von einem Punkte P 2 Tangenten PD und PE an einen Kreis und noch eine Sekante PAB, verbindet dann einen der Berührungspunkte (D) mit dem Mittelpunkte J der Sehne AB, welche Gerade den Kreis in G schneide, so ist die Verbindungslinie GE der Sekante PAB parallel.

Bew. (Fig. 51). Verbindet man G mit A, B, D, E, so erhält man, da diese Punkte die Ecken eines harmonischen Kreisvierecks sind, 4 harmonische Strahlen; es muß also AB von diesen Strahlen in 4 harmonischen Punkten geschnitten werden. Da nun GD durch den Mittelpunkt J von AB geht, so muß der zu GD oder GJ harmonisch konjugierte Strahl parallel zu AB sein, d. h. GE ∥ AB. Das Wesentlichste hier ist die Benutzung der Eigenschaft, daß ABDE ein harmonisches Viereck ist.

Ergänzung. Zieht man durch P eine zweite Sekante PCF, so erhält man ein zweites harmonisches Viereck CDFE. Die Verbindungslinien mit G geben 4 harmonische Strahlen, von denen GE und GF unverändert bleiben. Daraus folgt, daß die Schnittpunkte K und L von GF und GC mit AB solche Punkte sind, welche von J gleich weit entfernt sind; es ist KJ = JL.

In diesem Satze liegt offenbar eine Erweiterung des Satzes Nr. 43.

87. In jedem einem Kreise umschriebenen Viereck liegen die Mittelpunkte der Diagonalen mit dem Mittelpunkte des Inkreises in einer Geraden. (Newton.)

Bew. (Fig. 52). ABCD sei das Viereck mit den Diagonalen AC und BD. Da dasselbe einem Kreise umgeschrieben ist, so besteht die Bedingung AB + CD = BC + AD. Eine Umformung dieser Bedingung ist AB − BC = AD − CD. In einem Dreieck wird die Differenz von 2 Seiten durch die Entfernung des Berührungspunktes des Inkreises auf der dritten Seite von dem Berührungspunkt des der Seite angehörigen Ankreises gebildet. Ziehen wir also die Diagonale AC und zeichnen in den Dreiecken ABC und ADC die Inkreise und die zur Seite AC gehörigen Ankreise in diesen Dreiecken, so müssen die Berührungspunkte auf AC in den beiden Dreiecken dieselben sein. Diese Berührungspunkte seien E und E_1, ferner F der Mittelpunkt des Inkreises, F_1 der Mittelpunkt des zu AC gehörigen Ankreises in ABC, G und G_1 die Mittelpunkte der entsprechenden Berührungskreise in Dreieck ACD. Zieht man nun BE, BE_1, DE, DE_1, dann werden diese Geraden die angegebenen Kreise noch schneiden, und zwar BE den Kreis F_1 in H_1, BE_1 den Kreis F in H, DE den Kreis G_1 in K_1, DE_1 den Kreis G in K, welche Punkte die Gegenpunkte zu E_1, E der Kreise sind. — Zieht man dann AF und AF_1, so erhält man die

ähnlichen Dreiecke AEF und AF_1E_1. Man wird leicht einsehen, daß sie ähnlich sind, weil sie in 2 Winkeln übereinstimmen.

Setzt man also $EF = \rho$, $E_1F_1 = \rho_1$, so findet man die Relation:

$$\rho\rho_1 = AE_1 \cdot AE = AE \cdot EC.$$

Sind σ und σ_1 die Radien der Berührungskreise in ACD, so ist ebenso

$$\sigma \cdot \sigma_1 = AE \cdot EC, \text{ also } \rho\rho_1 = \sigma\sigma_1, \text{ oder}$$

$$2\rho : 2\sigma_1 = 2\sigma : 2\rho_1, \text{ d. h. } EH : E_1K_1 = EK : E_1H_1.$$

Schneiden sich nun EK_1 und E_1H in L, EH_1 und E_1K in N, so folgt wegen der Ähnlichkeit leicht zu bestimmender Dreiecke

$$E_1L : LH = E_1K_1 : EH,$$

$$E_1N : NK = E_1H_1 : EK, \text{ also}$$

da $E_1K_1 : EH = E_1H_1 : EK$ ist, so folgt:

$E_1L : LH = E_1N : NK$, und hieraus $LN \parallel HK$ und $LN \perp AC$.

Die Halbierungslinie des Winkels B geht durch F, den Mittelpunkt von EH, also da L und N auf BH oder BE_1 bez. DE_1 liegen, so geht BF und ebenso auch DG durch den Mittelpunkt Q von LN. Da BF und DG aber 2 Winkel des Vierecks halbieren, so ist ihr Schnittpunkt der Mittelpunkt des Inkreises von ABCD.

Wir können nun BE, BE_1, DE, DE_1 als 4 Seiten eines vollständigen Vierseits ansehen mit den Ecken $BDEE_1LN$, dessen Diagonalen BD, EE_1, LN sind. Ist P der Mittelpunkt von EE_1, R der Mittelpunkt BE, so liegen P, Q, R (Nr. 71) in einer Geraden, P der Mittelpunkt von EE_1 ist auch der Mittelpunkt von AD und damit der Satz bewiesen.

Bem. Die Hauptmomente bei diesem Beweise sind folgende: $AE_1 = EC$, wo E und E_1 die Berührungspunkte von Berührungskreisen in den Dreiecken ABC und ACD sind. Dann BHE, BEH_1, DEK_1, DKE_1 in gerader Linie; endlich auch die Anwendung des Satzes von den Mittelpunkten der Diagonalen eines vollständigen Vierseits.

e) Einige Sätze über Dreiecke, deren Grundgebilde besondere Beziehung haben.

88. Die Seiten eines Dreiecks ABC werden von einer Transversale in X, Y, Z geschnitten; errichtet man in diesen Punkten Lote zu den entsprechenden Seiten, so schließen sie in Dreieck A'B'C' ein, das ähnlich ABC ist. Diese beiden Dreiecke sind kollinear und zwar fällt das Kollineationscentrum mit einem der Punkte zusammen, in denen die den beiden Dreiecken umschriebenen Kreise K und K' einander schneiden. Verbindet man dann den zweiten Schnittpunkt dieser Kreise mit den Ecken des Dreiecks ABC, so schneiden diese Geraden den Umkreis von A'B'C' in 3 Punkten A''B''C'', die ein Dreieck bilden, deren ent-

sprechende Seiten ebenfalls senkrecht zu den Seiten von ABC sind; die Umkreise von ABC und A'B'C' schneiden sich rechtwinklig.

Bew. (Fig. 53). Daß die Dreiecke ABC und A'B'C' einander ähnlich sind, folgt leicht aus der Betrachtung der Winkel; sie liegen nicht ähnlich, wie ersichtlich ist, dagegen aber kollinear, da die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten in einer Geraden liegen. Es mögen sich nun AA' und CC' in P' schneiden, dann geht natürlich auch BB' durch denselben Punkt. Da AZA'Y ein Kreisviereck ist, so folgt $A(ZA') = Y(ZA')$. Ebenso folgt $Y(XC') = C(XC')$, also da $A(ZA')$ der Winkel $A(BP')$ und $C(XC')$ der Winkel $C(BP')$ ist, so folgt $A(BP') = C(BP')$; also liegen ABCP' auf einem Kreise. Schon vorher ist bemerkt, daß BB'P' in einer Geraden liegen, also da $P'(BC) = 180^0 - A(BC)$, so ist $P'(BC') = A(BC) = \alpha$; oder da $P(B'C') = \alpha$, so liegt P' auf dem Umkreise von A'B'C'.

Die Umkreise von ABC und A'B'C' mögen sich zum zweiten Male in P'' schneiden, ferner P''A, P''B, P''C den Umkreis von A'B'C' in A'', B'', C'' schneiden. Es ist dann $A(P''B) = P'(P''B) = P'(P''B') = A'(P''B')$ oder also $A(P''Z) = A'(P''Z)$, somit AA'ZP'' ein Kreisviereck, daraus folgt $Z(AA') = P''(AA') = 1$ R, also auch $P''(A'A'') = 1$ R, also A'A'' ein Durchmesser im Umkreise von A'B'C', ebenso natürlich B'B'', C'C'', daher A''B'' ∥ A'B', ebenso B''C'' ∥ B'C', C''A'' ∥ C'A'.

Zieht man dann in P'' die Tangente an den Umkreis von ABC, so möge dieselbe mit P'P'' den Winkel ω bilden; es ist dann $\omega = C(P'P'')$. Zieht man in P'' die Tangente an den Umkreis von A'B'C', und ist ω' der Winkel derselben mit P'P'', so ist $\omega' = C'(P'P'')$, also $\omega + \omega' = C(P'P'') + C'(P'P'') = 180^0 - P''(CC') = P''(C'C'') = 1$ R.

Da also die Tangenten einen rechten Winkel bilden, so schneiden sich die Kreise rechtwinklig.

Daß die Kollineationsachse von ABC und A'B'C' der Simsonschen Geraden von P', die Kollineationsachse von ABC und A''B''C'' der Simsonschen Geraden von P'' parallel ist, sei noch nebenbei bemerkt, woraus noch folgt, daß bei einer Parallelverschiebung der Kollineationsachse XYZ der Punkt P' unverändert bleibt, während natürlich sich P'' und damit die Kollineationsachse von ABC und A''B''C'' verändert.

89. Wenn man in Bezug auf einen Kreis das Polardreieck (d. h. das Dreieck, dessen Ecken die Pole der Seiten des ersten Dreiecks sind) bestimmt, so sind die beiden Dreiecke kollinear.

Bew. Es sei (Fig. 54) ABC das ursprüngliche Dreieck, A'B'C' das Polardreieck, also A der Pol von B'C' u. s. w. Es mögen sich dann BB' und CC' in S schneiden und A'B'C'S sehen wir als

die Ecken eines vollständigen Vierecks an. Wir machen von der Eigenschaft Gebrauch, daß die Seiten desselben durch eine Transversale in den Punkten eines Punktesystems geschnitten werden. Als solche Transversale können wir eine Seite des ursprünglichen Dreiecks ansehen, wir wählen dazu BC, insofern S durch BB′ und CC′ bestimmt ist. Es schneidet B′S die Seite BC in B, A′C′ diese Seite in E, daher sind B und E ein Paar konjugierte Punkte des Punktesystems. Schneidet A′B′ die Seite BC in F, so sind C und F, da C′S durch C geht, ein ebensolches Paar. Schneiden endlich A′S und B′C′ die Seite BC in K und H, so sind diese ebenfalls ein solches Paar. Nun liegt E auf der Polare von B, F auf der Polare von C, daher gehören die Punkte B und E, C und F dem Punktesystem an, das der Geraden BC in Bezug auf den Kreis angehört. Ein solches Punktesystem ist durch 2 Paare bestimmt, und da H und K ein konjugiertes Paar des Punktesystems ist, so geht die Polare von H durch K; diese muß aber auch durch A′ gehen, da H auf der Polare von A′ liegt, und KA′ ist die Polare von H. Da H auch auf B′C′ liegt, so muß die Polare durch A, den Pol von B′C′ gehen und KA′ ist die Gerade AA′, die also ebenfalls durch S geht.

Bem. Der Kernpunkt des Beweises liegt darin, daß das Punktesystem, das durch die Ecken eines vollständigen Vierecks hier bestimmt wird, in Übereinstimmung gebracht wird mit einem Punktesystem, das einer Geraden in Beziehung auf den Kreis angehört.

90. Satz von Artzt. Die Brianchonschen Punkte von 2 perspektivisch liegenden Dreiecken, die denselben Kreis berühren, liegen mit ihrem Kollineationscentrum in einer Geraden.

Bew. (Fig. 55). Es seien ABC und A′B′C′ die beiden Dreiecke, welche kollinear sind und zugleich denselben Kreis berühren, die Berührungspunkte seien bez. α, β, γ und α', β', γ'. Es mögen sich ferner AB und A′C′ in D, AC und A′B′ in E schneiden, Z das Kollineationscentrum der beiden Dreiecke und g ihre Kollineationsachse sein, endlich J und K die Brianchonschen Punkte der beiden Dreiecke. Zunächst geht DE durch Z, denn es ist BCEB′C′D ein Sechseck um den Kreis, worin also BB′, CC′ und ED die Hauptdiagonalen sind. Ferner ist AEA′D ein Vierseit um den Kreis oder auch ADA′E, wobei AA′ und DE die Diagonalen sind; die Verbindungslinien der Berührungspunkte der Gegenseiten, d. h. hier $\gamma\gamma'$ und $\beta\beta'$ gehen durch denselben Schnittpunkt, d. h. also durch Z. Betrachten wir nun die Dreiecke B$C\gamma$ und B′C′γ', so finden wir, daß sie kollinear sind, da die Verbindungslinien BB′, CC′, $\gamma\gamma'$ durch denselben Punkt Z gehen; es liegen also die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten in einer Geraden, dies ist

hier BC—B'C' oder F, $B\gamma - B'\gamma'$ oder G, $C\gamma - C'\gamma'$. Da $B\gamma$ und BA, $B'\gamma'$ und B'A' dieselben Geraden sind, so folgt also, daß die Kollineationsachse die Gerade g ist. Dasselbe findet mit den Dreiecken $BC\beta$ und $B'C'\beta'$ statt. Daher haben auch die Dreiecke BCJ, B'C'K dieselbe Kollineationsachse, denn BC und B'C' bestimmen F, BJ ist $B\beta$, wie B'K die Gerade B'B', und CJ die Gerade $C\gamma$, C'K die Gerade $C'\gamma'$ ist. Da also die Dreiecke BCJ und B'C'K kollinear sind, so schneiden sich BB', CC', JK in einem Punkte, das ist aber Z.

Bem. Der Kernpunkt beim Beweise ist, daß man den Schnittpunkt von 2 Geraden auch als Schnittpunkt der einen Geraden mit einer dritten ansehen kann, daß eine durch 2 Punkte bestimmte Gerade (9) auch durch andere Punkte bestimmt gedacht werden kann.

91. Satz von Schröter. Es seien (Fig. 56.) A_0, B_0, C_0 die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks ABC, A_1, B_1, C_1 die Höhenfußpunkte, α, β, γ die Schnittpunkte $(B_0C_1 - C_0B_1)$, $(C_0A_1 - A_0C_1)$, $(A_0B_1 - B_0A_1)$; α_1, β_1, γ_1 die Schnittpunkte $(B_0C_0 - B_1C_1)$, $(C_0A_0 - C_1A_1)$, $(A_0B_0 - A_1B_1)$, M der Mittelpunkt des Umkreises, H der Schnittpunkt der Höhen, F der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises; dann finden folgende Beziehungen statt:

1. Die Punkte α, β, γ liegen auf der Geraden HM,

2. Die Geraden $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ sind parallel unter sich und senkrecht zu HM.

3. Die Punkte α_1, β_1, γ_1, A bez. β, γ_1, α_1, B; γ, α_1, β_1, C sind auf einer Geraden.

4. α_1, β_1, γ_1 bilden ein harmonisches Tripel in Bezug auf den Feuerbachschen Kreis.

5. Die Geraden $A_0\alpha_1$, $B_0\beta_1$, $C_0\gamma_1$ gehen durch denselben Punkt P, $A_1\alpha_1$, $B_1\beta_1$, $C_1\gamma_1$ durch denselben Punkt P'.

6. Die Punkte P und P' liegen auf dem Feuerbachschen Kreise.

7. Die Schnittpunkte $(AB - \alpha_1\beta_1)$, $(BC - \beta_1\gamma_1)$, $(AC - \alpha_1\gamma_1)$ liegen auf der Geraden PP^1.

Bew. (Fig. 56).

1. Es seien A_f, B_f, C_f die Mittelpunkte von AH, BH, CH, dann ist bekannt, daß der Feuerbachsche Kreis durch diese Punkte geht, und daß sich A_0A_f, B_0B_f, C_0C_f in F schneiden. Wir betrachten nun das Sechseck $B_0C_1C_fC_0B_1B_f$; da dasselbe einem Kreise eingeschrieben ist, so schneiden sich die Gegenseiten in 3 Punkten einer Geraden, d. h. $(B_0C_1 - C_0B_1)$ oder α, $(C_1C_f - B_1B_f)$ oder H, $(C_fC_0 - B_fB_0)$ oder F, d. h. α liegt auf HF oder HM. Ebenso läßt sich dies natürlich von β und γ beweisen.

2. Die Punkte $A\alpha\alpha_1$ bilden in Bezug auf den Feuerbachschen Kreis ein harmonisches Tripel; also ist $A\alpha_1$ die Polare von α; ebenso $B\beta_1$ die Polare von β $C\gamma_1$ die Polare von γ; als solche sind sie senkrecht zu dem Durchmesser, auf dem α, β, γ liegen, d. h. auf HM.

3. und 4. Es ist $A_0B_0C_1A_1B_1C_0$ ein Sechseck im Kreise, daher liegen $(A_0B_0 - A_1B_1)$, $(B_0C_1 - B_1C_0)$, $(C_1A_1 - C_0A_0)$, d. h. $\gamma_1, \alpha, \beta_1$ in einer Geraden, ebenso natürlich $\beta, \gamma_1, \alpha_1$; $\gamma, \alpha_1, \beta_1$.

Schneidet nun B_1C_1 die Seite BC in A_3, so wird BC durch A_1A_3 harmonisch geteilt, ebenso wird BC durch A_0 und den Punkt unendlich harmonisch geteilt. Daher ist das Büschel $C_0(C_1BA_0\infty)$ harmonisch, ebenso $C_1(CBA_1A_3)$. Die Strahlen C_0B und C_1B fallen zusammen; also müssen die Schnittpunkte der 3 andern Strahlen in einer Geraden liegen; das sind $(C_0C - C_1C)$, $(C_0A_0 - C_1A_1)$, $(C_0\infty - C_1A_3)$ oder C, β_1, α_1. Es ist selbstverständlich, daß ebenso A, β_1, α_1; B, γ_1, α_1 in einer Geraden liegen.

Da $\alpha, \beta_1, \gamma_1$ in einer Geraden liegen, so haben wir auf dieser Geraden also noch den Punkt A; ebenso liegen $B, \beta, \gamma_1, \alpha_1$ und $C, \gamma, \alpha_1, \beta_1$ auf einer Geraden.

$A\alpha$ oder $\beta_1\gamma_1$ ist die Polare von α_1 (2), ebenso γ, α, die Polare von β_1, also ist $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ein harmonisches Tripel.

(5 u. 6). Gehen 2 Seiten eines in einen Kreis gezeichneten Dreiecks durch je einen Punkt eines harmonischen Tripels des Kreises, so geht die dritte Seite durch den dritten Punkt des Tripels. Es schneide nun $B_0\beta_1$ den Feuerbachschen Kreis in P, dann ist B_0C_0P diesem Kreise eingezeichnet; hier geht B_0C_0 durch α_1, B_0P durch β_1, also muß C_0P durch γ_1 gehen oder man kann sagen, es schneiden sich $B_0\beta_1$ und $C_0\gamma_1$ in einem Punkte P des Feuerbachschen Kreises. Es ist klar, daß auch $A_0\alpha_1$ durch diesen Punkt gehen muß.

Schneidet $B_1\beta_1$ den Feuerbachschen Kreis in P', so hat man ein zweites Dreieck B_1C_1P', das diesem Kreise eingezeichnet ist. Dabei geht B_1C_1 durch α_1, B_1P' durch β_1, also geht C_1P' durch γ_1 oder es schneiden sich $B_1\beta_1$ und $C_1\gamma_1$ in einem Punkte P' des Feuerbachschen Kreises. Daß auch $A_1\alpha_1$ durch den Punkt geht, ist klar.

7. Wir betrachten Viereck $A_0A_1P'P$. Da A_1P' und A_0P sich in α_1 schneiden, so muß der Schnittpunkt von PP' mit A_0A_1 auf der Polare von α_1 liegen, d. h. der Schnittpunkt A_2 von $\beta_1\gamma_1$ mit BC liegt auf PP'. Dasselbe gilt von den Schnittpunkten B_2 und C_2 von $\gamma_1\alpha_1$ mit CA und $\alpha_1\beta_1$ mit AB.

Es ist leicht eine Menge anderer Folgerungen noch anzuschließen, z. B.

A_1P und A_0P' mögen sich in α_2, B_1P und B_0P' in β_2, C_1P und C_0P' in γ_2 schneiden; dann sieht man, daß $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ die

Polaren von A_2, B_2, C_2 sind; diese Geraden müssen sich also in einem Punkte schneiden, nämlich in dem Pole dieser Geraden, d. h. der Geraden PP'. Es muß auch α_2 auf der Polare von α_1 d. h. auf $A\alpha$ liegen; ebenso liegt β_2 auf $B\beta$, γ_2 auf $C\gamma$.

Betrachtet man das Sechseck $C_0B_1PC_1B_0P'$, so ergiebt sich aus dem Satze von Pascal, daß α, β_2, γ_2 in einer Geraden liegen, also auch β, γ_2, α_2; γ, α_2, β_2.

Auf weitere Folgerungen, die durch dieselben Mittel erhalten werden können, kann verzichtet werden, da in den obigen Sätzen der Gebrauch derselben gezeigt ist.

92. Satz von Steiner. Sind irgend 2 in einer Ebene liegende Dreiecke so beschaffen, daß, wenn man aus den Ecken des einen die Lote auf die Seiten des andern in irgend einer Ordnung genommen fällt, diese sich in einem Punkte schneiden, so schneiden sich auch diejenigen Lote, welche in entsprechender Ordnung aus den Ecken des zweiten Dreiecks auf die Seiten des ersten gefällt werden, in einem Punkte.

Man kann diesen Satz auch so auffassen:

Fällt man aus irgend einem Punkte P in der Ebene eines Dreiecks die Lote PD, PE, PF auf die Seiten, in welchen Loten man irgend 3 Punkte D, E, F als Ecken eines Dreiecks annimmt und fällt auf dessen Seiten von den Ecken des Grunddreiecks die Lote in entsprechender Ordnung, so schneiden sich dieselben in einem Punkte Q.

Nimmt man ferner in ähnlicher Weise ein neues Dreieck D'E'F' an, dessen Ecken in denselben Loten von P liegen, so wird zu diesem Dreieck in gleicher Weise ein Punkt Q' gehören; alsdann liegen die 3 Durchschnittspunkte α, β, γ der 3 Paare entsprechender Seiten der 2 Dreiecke DEF und D'E'F' in einer Geraden, welche zur Geraden QQ' senkrecht ist.

Bew. (Fig. 57). Man beschreibe aus den Punkten ABC Kreise, so daß PD, PE, PF die Potenzlinie zu je 2 Kreisen sind. Dies ist natürlich auf mehrfache Weise möglich. Der erste Kreis ist beliebig, die andern werden dann natürlich bestimmt. Schlägt man z. B. von B einen Kreis, der PD in K und J schneidet so wird man von C den Kreis legen, der ebenfalls durch K und J geht. Von F schlägt man alsdann den Kreis, der den um B rechtwinklig schneidet. Der um A gelegte Kreis, der diesen wieder rechtwinklig schneidet, ist der dritte gesuchte Kreis; denn offenbar ist PF die Potenzlinie der Kreise um A und B, da $PF \perp AB$ ist, und der um F gelegte Kreis die Kreise um A und B rechtwinklig schneidet. Der Kreis um A hat aber auch mit dem Kreise

um C die Gerade PE als Potenzlinie, denn durch P muß dieselbe gehen und senkrecht zu AC muß sie auch sein. Von E läßt sich also ein Kreis legen, der die Kreise um A und C rechtwinklig schneidet, ebenso um D ein solcher, der die um B und C rechtwinklig schneidet. Die Potenzlinie der Kreise um E und F ist also das von A auf EF gefällte Lot, ebenso die Potenzlinie von F und D das von B auf FD gefällte Lot, endlich die Potenzlinie von D und E das von C auf DE gefällte Lot. Diese Lote müssen nach dem Satze, daß die 3 Potenzlinien von 3 Kreisen sich in einem Punkte schneiden, durch denselben Punkt Q gehen, welcher das Potenzcentrum der 3 Kreise um D, E, F ist.

In ähnlicher Weise läßt sich vom Dreieck D'E'F' zeigen, daß die Lote von A auf E'F', von B auf F'D', von C auf D'E' sich in einem Punkte Q' schneiden, welcher das Potenzcentrum von 3 Kreisen D', E', F' ist, welche je 2 der Kreise um A, B, C rechtwinklig schneiden.

Die Dreiecke DEF und D'E'F' sind kollinear, da sich DD', EE', FF' in dem Punkte P schneiden; daher müssen die Schnittpunkte EF—E'F' oder α, FD—F'D' oder β, DE—D'E' oder γ in einer Geraden liegen.

Um Q und Q' denken wir uns die Orthogonalkreise geschlagen in Bezug auf die Kreise D, E, F und D', E', F'. Es schneidet dann der Kreis um E und der um F den Kreis um A und den Orthogonalkreis um Q rechtwinklig, also ist EF die Potenzlinie der beiden Kreise; ebenso ist E'F' die Potenzlinie der Kreise um A und Q'. Der Schnittpunkt α hat also gleiche Potenzen in Bezug auf Q und Q', liegt somit auf der Potenzlinie dieser Kreise. Dasselbe läßt sich ebenso von den Punkten β, γ beweisen, also ist $\alpha\beta\gamma$ die Potenzlinie der beiden Kreise um Q und Q', muß daher auch senkrecht zur Centrale QQ' liegen.

Bem. Der Kernpunkt des Beweises ist klar. Nun kann wohl mancher der Kreise imaginär sein (hier z. B. der um D), doch wird dadurch die Schlußfolge nicht unrichtig gemacht, da einem imaginären Kreise immer reelle Beziehungen zu Grunde liegen.

93. Über die Beziehungen eines Grunddreiecks zu dem Dreieck, das man erhält, wenn man die Berührungspunkte der Ankreise auf den Seiten, die nicht demselben angehören, verbindet.

1. Die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken gehen durch den Höhenschnittpunkt des Grunddreiecks, der daher das Kollineationscentrum der beiden Dreiecke ist.

Bew. (Fig. 58). Das Dreieck sei ABC, die Mittelpunkte der Berührungskreise seien nach alter Bezeichnung O, O', O'', O''', die Be-

rührungspunkte bez. O_a, O_a' 2c.; ferner das durch die Verbindungslinien $O_c'O_b'$, $O_a''O_c''$, $O_b'''O_a'''$ bestimmte Dreieck $\alpha\beta\gamma$. Da $O''O''' \perp AO$, ebenso $O_c'O_b' \perp AO$ und $\beta\gamma$ der Lage nach die Gerade $O_c'O_b'$ ist, so ist $O''O''' \parallel \beta\gamma$, woraus weiter folgt, da für die andern Seiten Entsprechendes gilt, daß $\alpha\beta\gamma \infty O'O''O'''$ ist.

Wir bezeichnen ferner den Schnittpunkt von $O''O'''$ und $\alpha\gamma$ mit α_1, den Schnittpunkt von $O''O'''$ und $\alpha\beta$ mit α_2, und denken uns die entsprechenden Punkte β_1, β_2, γ_1, γ_2 bestimmt; endlich schneide AO' die Gerade $\beta\gamma$, zu der sie senkrecht ist, in A', ebenso BO'' die Gerade $\beta\gamma$ in B', CO''' die Gerade $\alpha\beta$ in C'.

Es ergiebt sich, wenn wir ganz wie früher die Radien der Berührungskreise und die Winkel des Dreiecks ABC bezeichnen,

$$O''B' = \rho'' \sin \frac{\beta}{2}.$$

Es ist dann $O''(\alpha_1 B') = \frac{\gamma}{2}$, denn im Dreieck BAO'' ist $B(AO'') = \frac{\beta}{2}$, $A(BO'') = 90^0 + \frac{\alpha}{2}$, somit $\alpha_1 B' = \rho'' \sin \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = p \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2} = (p-a) \sin \frac{\beta}{2}$. Verbindet man aber O_a''' mit O_c''', so entsteht das gleichschenklige Dreieck $BO_a'''O_c'''$ mit dem Winkel $180^0 - \beta$ an der Spitze, also $\frac{\beta}{2}$ an der Grundlinie. Die Höhe dieses Dreiecks sei BV; da nun $BO_c''' = p-a$ ist, so ist $BV = (p-a) \sin \frac{\beta}{2}$, also $BV = \alpha_1 B'$. Da $O_a'''O_c''' \parallel BO$ ist, so folgt wegen $BV = \alpha_1 B'$, daß $O_a'''O_c'''$ durch α_1 geht und außerdem $O_a'''\alpha_1 \perp \alpha\gamma$ oder $O'''\alpha_1$ eine Höhe im Dreieck $O_a'''O_a''\alpha$ ist.

Ebenso läßt sich zeigen, daß $O_a''\alpha_2$ eine zweite Höhe dieses Dreiecks ist, wobei das gleichschenklige Dreieck $CO_a''O_b''$ benutzt wird. Diese beiden Geraden $O_c'''\alpha_1$ und $O_a''\alpha_2$ müssen sich also auf der dritten Höhe des Dreiecks $O_a'''O_a''\alpha$ schneiden. Da $\alpha_1\alpha_2$ die Verbindungslinie der Höhenfußpunkte ist, so muß dieselbe die Gerade $O_a''O_a'''$ in dem Punkte schneiden, welcher harmonisch konjugiert ist zum Höhenfußpunkte des Dreiecks in Bezug auf $O_a''O_a'''$. Der Schnittpunkt ist nun der Punkt E', in welchem die Halbierungslinie des Außenwinkels an der Ecke A, denn $\alpha_1\alpha_2$ ist ja diese Halbierungslinie, die Seite BC trifft. Der harmonisch konjugierte zu E' in Bezug auf $O_a''O_a'''$ ist aber der Höhenfußpunkt von A auf BC. Das von α auf $O_a''O_a'''$ oder BC gefällte Lot geht also durch den Höhenfußpunkt H_a von A auf BC, oder also, da man in H_a nur ein Lot zu BC hat, es geht das von α auf BC gefällte

Lot durch A oder αA geht durch den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC. Ebenso gehen natürlich auch βB und γC durch H. Die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und ABC sind also kollinear und der Höhenschnittpunkt H von ABC ist das Kollineationscentrum.

2. Der Höhenschnittpunkt H von ABC ist der Mittelpunkt des Umkreises von $\alpha\beta\gamma$.

Bew. Es ist $\alpha\beta\gamma \infty \alpha O_a'' O_a'''$, aber umgekehrt in Bezug auf die Ecke α liegend; daher hat eine Ecktransversale in dem einem Dreieck die Bedeutung der Gegentransversale im andern Dreieck.

Da αA in $\alpha O_a'' O_a'''$ die Höhe ist, so ist dieselbe Gerade in $\alpha\beta\gamma$ der Durchmesser des Umkreises, ebenso sind βB, γC Durchmesser des Umkreises von $\alpha\beta\gamma$. Da sie sich in H schneiden, so ist H der Mittelpunkt des Umkreises.

3. Der Radius des Umkreises von $\alpha\beta\gamma$ ist $2r + \rho$ (r Radius des Umkreises von ABC).

Bew. $\alpha A : A O_b''' = \sin\left(90^0 + \frac{\gamma}{2}\right) : \sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\gamma}{2} : \sin\frac{\gamma}{2}$,

also $\alpha A = (p-b)\cot\frac{\gamma}{2} = \rho'$, ebenso $\beta B = \rho''$, $\gamma C = \rho'''$.

Wir finden somit $\alpha H = \rho' + 2r\cos\alpha = \rho + 4r\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2r\cos\alpha$ $= 2r + \rho$, ebenso $\beta H = 2r + \rho$, $\gamma H = 2r + \rho$, da αH unabhängig von α ist.

4. Die dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ einbeschriebenen Dreiecke $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ sind einander kongruent und demselben Kreise einbeschrieben.

Bew. Es ist $O_a'''B\beta_1 \cong CO_a''\gamma_2$, da $O_a'''B = CO_a''$ ist und die entsprechenden Dreiecksseiten parallel sind; daher $B\beta_1 = O_a''\gamma_2$ und auch parallel, somit $\beta_1\gamma_2 \parallel BO_a''$, $\beta_1\gamma_2 \parallel BC$, ebenso $\gamma_1\alpha_2 \parallel CA$, $\alpha_1\beta_2 \parallel AB$.

Da $\alpha_1\alpha_2 O_a''' O_a''$ ein Kreisviereck ist, so auch $\alpha_1\alpha_2\beta_1\gamma_2$, weil dies Viereck mit dem ersten dieselben Winkel hat; ebenso ist $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2$ ein Kreisviereck. Es ist nämlich $\alpha_1\gamma_2\gamma_1\beta_2$ ein Kreisviereck, und $\alpha_2\beta_1 \parallel \gamma_1\gamma_2$, also auch $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2$ ein Kreisviereck. 3 Punkte der Kreisvierecke, nämlich α_1, α_2, β_1 sind dieselben, daher liegen alle diese Punkte auf einem Kreise.

Daß dann $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2$ ist, folgt sofort daraus, daß diese 4 Punkte ein Trapez bilden. Natürlich muß auch $\beta_1\gamma_1 = \beta_2\gamma_2$ und $\gamma_1\alpha_1 = \gamma_2\alpha_2$ sein.

Die Berechnung der Längen führt natürlich zu demselben Resultat. Es ist $\overline{\alpha_1\beta_1}^2 = \alpha_1 V^2 + V\beta_1^2$,

$\alpha_1 V = BB' = p\cos\frac{\beta}{2}$,

$O_a'''\beta_1 : O_a'''B = \sin\left(90^0 - \frac{\beta}{2}\right) : \sin\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$, also

$O_a'''\beta_1 = \dfrac{(p-a)\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ also $\beta_1 V = (p-a)\cos\frac{\beta}{2}\,.\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \rho\cos\frac{\beta}{2}$,

also $\alpha_1 V^2 + V\beta_1^2 = (p^2+\rho^2)\cos^2\frac{\beta}{2} = \overline{\alpha_1\beta_1}^2$;

ebenso $\overline{\beta_1\gamma_1}^2 = (p^2+\rho^2)\cos^2\frac{\gamma}{2}$, $\overline{\gamma_1\alpha_1}^2 = (p^2+\rho^2)\cos^2\frac{\alpha}{2}$;

man sieht hieraus noch, daß die Winkel des Dreiecks $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ sind: $90^0 - \frac{\alpha}{2}$, $90^0 - \frac{\beta}{2}$, $90^0 - \frac{\gamma}{2}$ und zwar bei den Ecken β_1, γ_1, α_1.

Man beweist dies freilich auch anders.

$$\alpha_1(\beta_1\gamma_1) = \gamma_2(\beta_1\gamma_1) = C(BO') = 90^0 - \frac{\gamma}{2}, \text{ ꝛc.}$$

Ebenso ist: $\overline{\alpha_2\gamma_2}^2 = \overline{\alpha_2 V'^2} + V'\gamma_2^2$, wenn V' der Mittelpunkt von $O_a''O_b''$ ist.

$$\alpha_2 V' = CC' = p\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$V'\gamma_2 = O_a''\gamma_2\,.\,\sin\frac{\alpha}{2} = (p-a)\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\,.\,\cos\frac{\gamma}{2} = \rho\cos\frac{\gamma}{2}, \text{ also}$$

$\overline{\alpha_2\gamma_2}^2 = (\rho^2+p^2)\cos^2\frac{\gamma}{2}$, so daß die Winkel $90^0 - \frac{\alpha}{2}$, $90^0 - \frac{\beta}{2}$, $90^0 - \frac{\gamma}{2}$ bei den Ecken γ_2, α_2, β_2 sind.

Die Dreiecke $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ sind also $\alpha\beta\gamma$ ähnlich.

5. Die Kollineationsachse der Dreiecke ABC und $\alpha\beta\gamma$ ist senkrecht zur Verbindungslinie des Höhenschnittpunkts H mit dem Mittelpunkt O des Inkreises.

Bew. Bekanntlich schneiden sich AO_a', BO_b'', CO_c''' in einem Punkte, dem Nagelschen Punkte. Hieraus folgt weiter, daß $O_c'''O_b''$ die Gerade BC in einem Punkte X schneidet, der mit O_a' die Strecke BC harmonisch teilt. Ebenso schneiden sich AO_a', BO_b', CO_c' in einem Punkte, woraus folgt, daß $O_c'O_b'$ oder $\beta\gamma$ durch denselben Punkt X geht. Macht man diese Schlußfolgerung auch für BO_b'', CO_c''', so folgt, daß sich auch $O_c'''O_a'$, AC, $\alpha\gamma$ in demselben Punkte Y, und $O_b''O_a'$, AB, $\alpha\beta$ in demselben Punkte Z schneiden, so daß also XYZ die gemeinsame Kollineationsachse für die Dreiecke ABC, $\alpha\beta\gamma$, $O_a'O_b''O_c'''$ ist. Hieraus ergiebt sich, daß die 3 Kollineationscentra in einer Geraden liegen.

Soll nun bewiesen werden, daß $HO \perp XYZ$ ist, so ist etwa zu zeigen:

$$HZ^2 - HY^2 = OZ^2 - OY^2.$$

Wir setzen nun $BZ = z$, $CY = y$. Da nach dem Satze des Menelaus $\frac{BZ}{AZ} \cdot \frac{CO_a'}{BO_a'} \cdot \frac{AO_b''}{CO_b''} = 1$ ist, so folgt:

$$\frac{z}{c+z} = \frac{p-c}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c} = \frac{p-a}{p-b}, \quad \frac{z}{c} = \frac{p-a}{a-b}, \quad c+z = \frac{c(p-b)}{a-b}.$$

Ebenso findet man:

$$\frac{y}{b} = \frac{p-a}{a-c}, \quad b+y = \frac{b(p-c)}{a-c}.$$

Es ist ferner:

$$OZ^2 = OA^2 + AZ^2 - 2OA \cdot AZ \cdot \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$OY^2 = OA^2 + AY^2 - 2OA \cdot AY \cdot \cos\frac{\alpha}{2},$$

daher $OZ^2 - OY^2 = AZ^2 - AY^2 - 2AO \cdot \cos\frac{\alpha}{2}(AZ - AY)$.

Ferner ist:

$$HZ^2 = HA^2 + AZ^2 - 2HA \cdot AZ \cdot \sin\beta,$$
$$HY^2 = HA^2 + AY^2 - 2HA \cdot AY \cdot \sin\gamma,$$

also $HZ^2 - HY^2 = AZ^2 - AY^2 - 2HA\,(AZ\sin\beta - AY\sin\gamma)$.

Es ist also zu beweisen, daß

$$OA\cos\frac{\alpha}{2}(AZ - AY) = HA\,(AZ\sin\beta - AY\sin\gamma) \text{ ist}$$

oder $AZ\,(OA\cos\frac{\alpha}{2} - HA\sin\beta) = AY\,(OA\cos\frac{\alpha}{2} - HA\sin\gamma)$.

Es ist $OA\cos\frac{\alpha}{2} = p - a = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$,

$$HA = 2r\cos\alpha, \text{ also } HA\sin\beta = 4r\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2},$$

$$\begin{aligned} OA\cos\frac{\alpha}{2} - HA\sin\beta &= 4r\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \cos\alpha\cos\frac{\beta}{2}\right) \\ &= 4r\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\beta}{2} + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right) \\ &= 4r\sin\frac{\beta}{2}\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right) \\ &= 4r\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= 4r \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right.$$
$$\left.\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$$
$$= 4r \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Ferner

$$AZ = c + z = \frac{c(p-b)}{a-b} = \frac{4r\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha - \sin\beta} =$$
$$\frac{4r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\gamma}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\gamma}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}, \text{ also}$$
$$AZ\left(OA\cos\frac{\alpha}{2} - HA\sin\beta\right) = 8r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\gamma =$$
$$4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta\sin\gamma.$$

Der Wert von $AY\left(OA\cos\frac{\alpha}{2} - HA\sin\gamma\right)$ wird aus dem erstgenannten $AZ\left(OA\cos\frac{\alpha}{2} - HA\sin\beta\right)$ erhalten, indem man b und c bez. β und γ vertauscht. Dadurch bleibt der Ausdruck, wie aus der Form hervorgeht, unverändert, daher ist

$$AZ\left(OA\cos\frac{\alpha}{2} - HA\sin\beta\right) = AY\left(OA\cos\frac{\alpha}{2} - HA\sin\gamma\right),$$

woraus rückwärts folgt:

$$OZ^2 - OY^2 = HZ^2 - HY^2,$$

also $OH \perp YZ$.

f) Von den Gegentransversalen und den Gegenpunkten in einem Dreieck.

Bem. Wir wollen hier wesentlich Winkelgegentransversalen und Winkelgegenpunkte in Betracht ziehen und die betreffenden Gebilde daher einfach als Gegentransversalen und Gegenpunkte bezeichnen.

94. Man ersieht zunächst leicht, daß in einem Dreieck folgende Ecktransversalen Gegentransversalen sind.

1. Die Winkelhalbierungslinie mit sich selbst und zwar sowohl die innere als die äußere.
2. Höhe und Durchmesser des Umkreises.
3. Die Tangente an dem Umkreise und die Parallele zur Gegenseite.
4. Schwerlinie und Symmediane.

Auf diese letztere Gerade soll später noch besonders eingegangen werden.

Als Gegenpunkte sind zu erwähnen.

1. Die Mittelpunkte der Berührungskreise sind ihre eigene Gegenpunkte.

2. Der Höhenschnittpunkt und der Mittelpunkt des Umkreises.

3. Ein Punkt der Peripherie des Umkreises und ein Punkt im Unendlichen.

4. Schwerpunkt und Punkt von Lemoine, worauf auch erst später eingegangen wird.

95. Das Produkt von 2 Gegentransversalen, die eine bis zur Gegenseite, die andere bis zum Umkreise gerechnet, ist konstant, nämlich gleich dem Produkt der einschließenden Seiten.

Bew. Es sei ABC (Fig. 59) ein beliebiges Dreieck, AD und AD′ Gegentransversalen durch die Ecke A und AD′ schneide den Umkreis in E′. Indem wir die Bedingung benutzen, daß $A(BD) = A(D'C) = A(E'C)$ ist und daß E′ auf dem Umkreise liegt, ergiebt sich leicht $B(AC)$ oder $B(AD) = E'(AC)$ und $ABD \sim AE'C$, also

$$AB : AD = AE' : AC.$$

Schneidet AD den Umkreis in E, so ist natürlich auch

$$AB \cdot AC = AE \cdot AD'.$$

96. Fällt man von einem Punkte einer Ecktransversale die Lote auf die anstoßenden Seiten, so ist die Verbindungslinie der Fußpunkte senkrecht zur Gegentransversale.

Bew. (Fig. 59). Im Dreieck ABC sei P ein willkürlicher Punkt einer Ecktransversale AD, PQ und PR die Lote auf die anstoßenden Seiten AB und AC; dann ist im Dreieck AQR die Gerade AP der Durchmesser des Umkreises, also die Gegentransversale in demselben Dreieck die Höhe auf QR. Ist aber AD′ Gegentransversale zu AD im Dreieck ABC, so auch in AQR; daher $QR \perp AD'$.

97. Fällt man von 2 Punkten, die auf 2 Winkelgegentransversalen liegen, die Lote auf die anstoßenden Seiten, so ist das Produkt der Lote auf die eine Seite gleich dem Produkt der Lote auf die andere Seite.

Bew. (Fig. 59). Im Dreieck ABC seien P und P′ 2 Punkte auf Gegentransversalen, PQ, PR die Lote von P, P′Q′, P′R′ die Lote von P′ auf AB und AC, dann ist $APQ \sim AP'R'$ und $APR \sim AP'Q'$. Daraus folgt $\frac{PQ}{AP} = \frac{P'R'}{AP'}$, $\frac{P'Q'}{AP'} = \frac{PR}{AP}$; diese Gleichungen geben durch Multiplikation: $\frac{PQ \,.\, P'Q'}{AP \,.\, AP'} = \frac{PR \,.\, P'R'}{AP \,.\, AP'}$ oder $PQ \,.\, P'Q' = PR \,.\, P'R'$.

Hieraus ergiebt sich für 2 Winkelgegenpunkte der Satz:

Die Produkte der Lote von 2 Winkelgegenpunkten haben für alle 3 Seiten denselben Wert.

98. Sind AD und AD' 2 Gegentransversalen in einem Dreieck ABC, so ist $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{BD'}{D'C} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Bew. (Fig. 60). ABC das Dreieck 2c. Man ziehe BS ∥ AD bis zum Schnittpunkte mit AC und CT ∥ AD' bis zum Schnittpunkte mit AB, dann ist

$$\frac{BD}{DC} = \frac{SA}{AC}, \quad \frac{BD'}{D'C} = \frac{BA}{AT}, \text{ also, wenn man multipliziert,}$$

$$\frac{BD \,.\, BD'}{DC \,.\, D'C} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{SA}{AT}$$

$$SAB \sim CAT, \text{ also}$$

$$SA : AT = AB : AC, \text{ somit}$$

$$\frac{BD \,.\, BD'}{DC \,.\, D'C} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Bem. Da die Winkelhalbierungslinie ihre eigene Winkelgegentransversale ist, so folgt, wenn AD dieselbe ist

$$\frac{BD^2}{CD^2} = \frac{AB^2}{AC^2}, \quad \frac{BD}{DC} = \pm \frac{AB}{AC}.$$

Für die Gegentransversale AD zur Schwerlinie folgt:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

99. Wenn man von 2 Winkelgegenpunkten die Lote auf die Seiten fällt, so liegen die Fußpunkte auf einem Kreise.

Bem. (Fig. 61). Da 2 Winkelgegenpunkte sich eindeutig entsprechen (abgesehen von den Ecken selbst, denen ein beliebiger Punkt der Gegenseite entspricht), so kann man den Satz in folgender Weise umkehren: Fällt man von einem Punkte P die Lote auf die Seiten eines Dreiecks, legt durch die Fußpunkte den Kreis und errichtet in den Punkten, in welchen der Kreis die Seiten zum zweiten Male schneidet, die Lote, so schneiden sich dieselben im Winkelgegenpunkte von P.

Bew. (Fig. 61). Es sei ABC das Dreieck, P der Punkt, für den die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten die Punkte X, Y, Z sind; der Kreis durch X, Y, Z schneide die Seiten noch in X',Y',Z', es ist dann zu beweisen, daß sich die Lote in X',Y',Z' auf den Seiten im Winkelgegenpunkte P' von P schneiden. Zunächst mögen sich die in X' und Y' auf BC und AC errichteten Lote in einem Punkte schneiden, der P' genannt werde. Fällt man ferner vom Mittelpunkte M des

Kreises um XYZ die Lote auf die Seiten, so wird XX', YY', auch ZZ' halbiert. Da umgekehrt die Lote in den Mitten von XX' und YY' die Strecke PP' halbieren, so ist M der Mittelpunkt von PP'. Das im Mittelpunkte von ZZ' errichtete Lot geht nun durch M, also geht auch das in Z' auf AB errichtete Lot durch P'. Es ist ferner Z'(AY') = Y(AZ), denn YY'Z'Z ist ein Kreisviereck, wir können die Winkel als auf dem Bogen ZY' stehend ansehen. Es ist also auch Z'(P'Y') = Y(PZ), da diese Winkel jene zu einem Rechten ergänzen; also auch A(PZ) = A(P'Y'), weil AY'P'Z' und AYPZ Kreisvierecke sind.

Bem. Die Benutzung der Sätze vom Trapez und vom Peripheriewinkel bilden den Kernpunkt des Beweises.

100. Verbindet man 2 Winkelgegenpunkte mit 2 Ecken eines Dreiecks, so ist die Summe der entstandenen Winkel gleich der Summe von 180^0 und dem Winkel des Dreiecks, welcher an der dritten Ecke liegt.

Bew. (Fig. 61). Das Dreieck sei ABC, die Winkel desselben seien wie gewöhnlich mit α, β, γ bezeichnet; ferner die Winkelgegenpunkte mit B und C verbunden, so daß $B(PC) = B(P'A) = \varphi$, $C(PB) = C(P'A) = \psi$ ist. Zunächst ergiebt sich:

$$P(BC) = 180^0 - \psi - \varphi, \quad P'(BC) = 180^0 - (\beta - \varphi) - (\gamma - \psi)$$
$$= 180^0 - \beta - \gamma + \varphi + \psi, \text{ also}$$
$$P(BC) + P'(BC) = 360^0 - \beta - \gamma = 180^0 + \alpha.$$

Bem. Für den Fall, daß die Punkte außerhalb des Dreiecks liegen, bedarf der Satz nur einer geringen Modifikation.

g) Von der Symmediane und dem Punkte von Lemoine oder Grebe.

101. Die Symmediane teilt die Gegenseite nach dem Verhältnis der Quadrate der anstoßenden Seiten.

Bew. (Fig. 62). Zunächst sei bemerkt, daß der Satz als Zusatz von Nr. 98 folgt, wie es schon bemerkt ist; indessen wollen wir einen Beweis suchen, der direkt durch Benutzung der Bedingungen ans Ziel führt.

Um nicht oft eine Erklärung nötig zu haben, soll gleich eine allgemeine Bezeichnung eingeführt werden; die Symmedianen seien AL_α, BL_β, CL_γ, welche sich in L schneiden, dieselben Geraden mögen den Kreis in K_α, K_β, K_γ, schneiden; die vierten harmonischen Punkte zu den Ecken des Dreiecks und den Fußpunkten L_α, L_β, L_γ der Symmedianen seien L_α', L_β', L_γ', endlich M_a, M_b, M_c die Mittelpunkte von BC, CA, AB.

Ist Ω_a der Unendlichkeitspunkt auf BC, so ist $A(B, C, M_a, \Omega_a)$ harmonisch. Da nun $A(C\Omega_a) = \gamma$ ist, so erhalten wir zur Symmediane den vierten harmonischen Strahl, wenn wir an AB in A den Winkel γ

antragen. Dies wird dann die Tangente an den Umkreis, es ist also AL_α' Tangente an den Umkreis, natürlich auch BL_β', CL_γ'. Es ergiebt sich nun:

$$BL_\alpha : L_\alpha C = L_\alpha' B : L_\alpha' C, \text{ ferner}$$

$$L_\alpha' B : AB = L_\alpha' A : AC \text{ oder } L_\alpha' B : L_\alpha' A = c : b,$$

ebenso $$L_\alpha' A : L_\alpha' C = c : b,$$

also durch Multiplikation:

$$L_\alpha' B : L_\alpha' C = c^2 : b^2 \text{ oder}$$

$$BL_\alpha : L_\alpha C = c^2 : b^2.$$

102. L_α' ist der Mittelpunkt des Stücks auf BC, das durch die innere und äußere Halbierungslinie der Winkel an der Ecke A abgeschnitten wird.

Bew. Beschreibt man über dem angegebenen Stück als Durchmesser den Kreis, so wird derselbe den Umkreis rechtwinklig schneiden, da die Sekante BC, welche ein Durchmesser des zweiten Kreises ist, harmonisch geteilt wird. Zugleich wird der Kreis durch A gehen; der nach A gezogene Radius des zweiten Kreises muß also Tangente an den Umkreis sein. Da es nur einen Kreis giebt, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte rechtwinklig schneidet, während sein Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegt, so ist L_α' (Fig. 63) der Mittelpunkt dieses Kreises und also zugleich der Mittelpunkt des Stücks zwischen den Halbierungslinien der beiden Winkel der Ecke A.

Ist dann O_α der Punkt, in welchem die Halbierungslinie BC schneidet, so folgt:

$$L_\alpha' B : L_\alpha' C = \overline{BO}_\alpha{}^2 : \overline{O_\alpha C}^2 = c^2 : b^2.$$

Bem. Die um L_α' mit $L_\alpha' A$, um L_β' mit $L_\beta' B$, um L_γ' mit $L_\gamma' C$ beschriebenen Kreise heißen die Apollonischen Kreise des Dreiecks.

103. Die Symmedianen gehen durch die Pole der Gegenseiten in Bezug auf den Umkreis.

Bew. (Fig. 63). Zieht man die Schwerlinie AM_a, auch die Winkelhalbierungslinien AW_α, AV_α, wo W_a, V_a die Schnittpunkte der Winkelhalbierungslinien mit dem Umkreise sind, so bilden diese mit der Symmediane 4 harmonische Strahlen; es muß also der Durchmesser V_aW_α von AK_α in dem vierten harmonischen zu M_a konjugierten Punkte geschnitten werden; dies ist aber der Pol P_a von BC in Bezug auf den Umkreis.

104. Die Schnittpunkte der Tangenten an den Ecken eines Dreiecks mit den Gegenseiten sind die Pole der betreffenden Symmedianen.

Bew. (Fig. 62). Es soll bewiesen werden, daß L_α' der Pol von AK_α ist. Die Polare von A ist die Tangente in A, die Polare von

P_a, welcher Punkt auf AK_α liegt, ist BC, also ist der Schnittpunkt L_α' der Pol von AP_a oder AK_α.

Hieraus folgt noch, daß $L_\alpha' K_\alpha$ Tangente des Umkreises ist.

105. Folgerungen. Die Symmedianen haben folgende Eigenschaften:

1. Sie teilen die Gegenseiten nach dem Verhältnis der Quadrate der anstoßenden Seiten.

2. Sie gehen durch die Pole der Gegenseiten in Bezug auf den Umkreis.

3. Sie sind die vierten harmonischen Strahlen zu den Seiten des Dreiecks und der Tangente zum Umkreise, dieser konjugiert. Diese Eigenschaften sind vorher bewiesen und sollen nur nochmals hervorgehoben und zusammengefaßt werden.

4. Die Punkte, in welchen die Tangenten an den Ecken die Gegenseiten schneiden, liegen in einer Geraden.

Da dieselben die Pole von 3 Geraden sind, die sich in einem Punkte, dem Punkte von Lemoine, schneiden, so liegen sie auf der Polare des Punktes. — Diese Gerade heißt die Gerade von Lemoine.

5. Auf den Symmedianen hat man mehrere Systeme harmonischer Punkte. Hervorgehoben seien:

a) $A, K_\alpha, L_\alpha, P_a$, b) A, L_α, L, P_a.

Das erste folgt aus dem Fundamentalsatz von Pol und Polare; das zweite aus dem Satz vom vollständigen Vierseit. Wir sehen nämlich die Tangenten P_aB, P_aC und die Symmedianen BP_b, CP_c als die Seiten eines vollständigen Vierseits an. Eine Diagonale ist P_aL, welche durch $L_\alpha A$ harmonisch geteilt wird. Ein anderer Beweis ist folgender: BC wird durch $L_\alpha L_\alpha'$ harmonisch geteilt, also $P_\alpha(CBL_\alpha L_\alpha')$ harmonisch. Schneiden wir diese Strahlen durch AP_a, so ergiebt sich der Satz.

106. Schneiden sich BK_γ und CK_β in Q_a, so geschieht dies auf der Polare l von L, der Geraden von Lemoine; durch denselben Punkt geht auch die Symmediane AL.

Bew. (Fig. 62). $BCK_\beta K_\gamma$ ist ein Viereck im Kreise; da sich BK_β und CK_γ in L schneiden, so schneiden sich BK_γ und BK_β in einem Punkte der Polaren von L; ebenso müssen sich $K_\beta K_\gamma$ und BC auf der Polare von L schneiden; da L_α' der Schnittpunkt dieser Polaren mit BC ist, so geht $K_\beta K_\gamma$ durch L_α'. Die Verbindungslinie von L mit Q_a muß ferner die Polare von L_α' sein, da L, L_α', Q_α ein harmonisches Tripel ist, d. h. LQ_a ist die Gerade AL.

107. Die Symmedianen bestimmen mit ihren Schnittpunkten auf dem Umkreise ein Dreieck, welches kollinear zum Grunddreieck ist und die-

selben Symmedianen, also denselben Punkt von Lemoine hat. Das Kollineationscentrum ist dieser Punkt und die Gerade von Lemoine die Kollineationsachse.

Bew. (Fig. 62). Daß die Dreiecke kollinear sind, ist selbstverständlich; daß die Kollineationsachse die Gerade l ist, folgt daraus, daß sich $K\beta K\gamma$ und BC in $L\alpha'$ schneiden. Es sei dann $L\alpha''$ der Schnittpunkt von AL und $K\beta K\gamma$, dann wird $K\beta K\gamma$ durch $L'\alpha L\alpha''$ harmonisch geteilt, denn diese Punkte liegen auf dem Strahlenbüschel $Q_a(BCL_\alpha'L_\alpha)$. Die Tangente in $K\alpha$ trifft nun BC und $K\beta K\gamma$ in $L\alpha'$. Da $K\gamma K\beta$ durch $L\alpha'L\alpha''$ harmonisch getrennt wird, so ist (105,3) $K\alpha L\alpha''$ oder $K\alpha A$ die Symmediane in Dreieck $K\alpha K\beta K\gamma$. Dasselbe gilt für $K\beta B$, $K\gamma C$. Solche Dreiecke werden daher mit Recht kosymmedian genannt.

108. Wenn sich die Seiten von 2 kosymmedianen Dreiecken ABC und $K\alpha K\beta K\gamma$ außer in der Kollineationsachse noch in den Punkten B_a, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c schneiden, wo die Indices ergeben, auf welchen Seiten diese Punkte liegen, während die Hauptbuchstaben das Entsprechen der Ecke anzeigen (Fig. 62), dann gehen B_cC_b, C_aA_c, A_bB_a durch L, A_cA_b durch $L\alpha'$, B_aB_c durch $L\beta'$, C_bC_a durch $L\gamma'$.

Bew. $L\beta'(P_cL\gamma K\gamma C)$ harmonisch, ebenso $L\beta'(P_aL\alpha K\alpha A)$, welches gleiche Strahlenbüschel sind; daher wird $BL\gamma$ durch B_cA harmonisch geteilt, ebenso $BL\alpha$ durch B_aC; ebenso natürlich $AL\gamma$ durch A_cB, $AL\beta$ durch A_bC, $CL\beta$ durch C_bA, $CL\alpha$ durch C_aB. Es ist dann $L\alpha'(AL\gamma A_cB)$ harmonisch, ebenso $L\alpha'(AL\beta A_bC)$. Da hier 3 Strahlen zusammenfallen, so auch der vierte, d. h. $L\alpha'A_cA_b$ liegen in einer Geraden. — Ferner $L\beta'(AL\alpha LP_a)$ harmonisch, ebenso $L\beta'(AL\gamma A_cB)$. Da hier 3 Strahlen übereinstimmen, auch $L\beta'$, $L\gamma$, $L\alpha$ in einer Geraden liegen, so liegen $L\beta'$, L, A_c in einer Geraden. Da auch $L\beta'(CL\alpha C_aB)$ harmonisch ist, so liegen auch $L\beta'$, L, $C\alpha$ in einer Geraden oder A_cC_a geht durch L und $L\beta'$.

109. Unter der in 106 ff. angegebenen Bezeichnung erhält man noch folgenden Satz. Es schneiden sich A_bC_a und A_cB_a in Q_a, B_cA_b und B_aC_b in Q_b, C_aB_c und C_bA_c in Q_c.

Bew. $K\beta(AC_bL\beta C)$ oder $K\beta(AK\alpha BC)$ harmonisch, also ist auch, wenn R_α^β der Schnittpunkt von $AK\beta$ mit BC ist, $(R_\alpha^\beta C_aBC)$ harmonisch; also $Q_c(AC_aCB)$ harmonisch; da nun $(AB_cL\gamma B)$ harmonisch ist, also auch $Q_c(AB_cL\gamma B)$, so geht Q_cC_a durch B_c.

Bem. Diese Figur ist noch reich an harmonischen Gebilden. Es ist nämlich $Q_aL\alpha'L\beta'L\gamma'$, $Q_bL\beta'L\gamma'L\alpha'$, $Q_cL\gamma'L\alpha'L\beta'$ harmonisch, ferner wird B_aC_a durch $L\alpha L\alpha'$ harmonisch geteilt. Schneiden sich A_cC_b und A_bB_c in T_a, so liegt T_a auf $AK\alpha$ und AL wird durch $T_aK\alpha$ harmonisch geteilt u. s. w.

110. Die Lote vom Punkte von Lemoine auf die Seiten des Dreiecks verhalten sich wie die Seiten.

Bew. Da die Entfernungen des Schwerpunktes von den Seiten sich wie die Höhen, also umgekehrt wie die Seiten verhalten, weil Produkt von Seite und Höhe konstant ist, so müssen sich die Entfernungen des Winkelgegenpunktes wie die Seiten selbst verhalten.

111. In dem Dreieck, dessen Ecken die Fußpunkte der Lote vom Punkte von Lemoine auf die Seiten des Grunddreiecks sind, ist der Punkt von Lemoine des Grunddreiecks der Schwerpunkt.

Bew. (Fig. 63). Aus den Fundamentalbedingungen für den Schwerpunkt leitet man leicht die Eigenschaft ab, daß die Inhalte der Dreiecke, welche durch die Verbindungslinien des Schwerpunktes mit den Ecken entstehen, einander gleich sind. Man ersieht auch leicht, daß ein zweiter Punkt innerhalb des Dreiecks, der diese Eigenschaft hat, nicht vorhanden ist. Ist ABC das gegebene Dreieck, L der Punkt von Lemoine und $L_aL_bL_c$ die Fußpunkte von L auf BC, CA, AB, so ist (Nr. 110)

$$LL_a = \lambda a,\ LL_b = \lambda b,\ LL_c = \lambda c,$$

wo λ ein unbekannter Faktor ist, der sich aber bestimmen läßt. Es folgt dann leicht:

$2\,LL_bL_c = \lambda^2 bc \sin\alpha$, $2\,LL_cL_a = \lambda^2 ca \sin\beta$, $2\,LL_aL_b = \lambda^2 ab \sin\gamma$,

also da $bc \sin\alpha = ca \sin\beta = ab \sin\gamma = 2\,\triangle$ ist, so ist auch:

$$LL_bL_c = LL_cL_a = LL_aL_b;$$

und L der Schwerpunkt von $L_aL_bL_c$.

Umgekehrt erhält man die Folgerung:

Errichtet man in den Ecken eines Dreiecks die Lote zu den Schwerlinien, so ist der Schwerpunkt des ursprünglichen Dreiecks der Punkt von Lemoine in dem durch die Lote gebildeten Dreieck.

Zur Bestimmung von λ sei noch bemerkt:

Es ist

$a \cdot LL_a + b \cdot LL_b + c \cdot LL_c = 2\,\triangle$, oder

$$\lambda(a^2+b^2+c^2) = 2\,\triangle,\ \text{also}\ \lambda = \frac{2\,\triangle}{a^2+b^2+c^2} = \frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}.$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma}.$$

112. Die Länge der zur Seite a gehörigen Symmediane wird durch den Ausdruck gegeben: $\frac{2\,bct'}{b^2+c^2}$, wo t' die entsprechende Schwerlinie ist.

Bew. Die Schwerlinie von der Ecke A schneide den Umkreis in X; bezeichnet man alsdann die Symmediane zu a mit s', so hat man:

$$s' \cdot (AM_a + M_aX) = b \cdot c,$$

$$AM_a = t', \; M_aX = \frac{a^2}{4t'}, \text{ also } AM_a + M_aX = t' + \frac{a^2}{4t'} = \frac{4t'^2 + a^2}{4t'}.$$

Nach Nr. 35 ist $4t'^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$, also hat man

$$s' \cdot \frac{b^2 + c^2}{2t'} = bc \text{ oder } s' = \frac{2bct'}{b^2 + c^2}.$$

Es folgt hieraus noch die Relation:

$$\frac{t' - s'}{t' + s'} = \frac{(b-c)^2}{(b+c)^2}.$$

113. Der Punkt von Lemoine hat die Eigenschaft, daß die Summe der Quadrate der Entfernungen von den Seiten ein Minimum ist.

Bew. Die Entfernungen eines Punktes P von den Seiten des Dreiecks seien bez. x, y, z. Nach der gewöhnlichen Bezeichnung hat man die Bedingungsgleichung

$$ax + by + cz = 2\,\Delta.$$

Es gilt ferner die Relation:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) &= (ax+bx+cz)^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2 \\ &\quad + (ay-bx)^2 \\ &= 4\Delta^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2 + (ay-bx)^2.\end{aligned}$$

Daher haben wir das Minimum für $x^2 + y^2 + z^2$, wenn die 3 letzten Quadrate verschwinden, wenn also:
$bz - cy = 0$, $cx - az = 0$, $ay - bx = 0$ ist. Dies giebt leicht

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Dies ist aber die Bedingung, welche den Punkt von Lemoine bestimmt. Wir finden hierfür:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4\,\Delta^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{4\,\Delta}{a^2+b^2+c^2} \cdot \Delta = \frac{\Delta}{\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma}.$$

Bem. Denkt man sich in ein Dreieck alle möglichen Dreiecke eingezeichnet und untersucht die Summen von den Seiten der Quadrate derselben, so findet man, daß diese Summe ein Minimum wird für das Dreieck, dessen Ecken die Fußpunkte der Lote vom Punkte Lemoine auf die Seiten sind. Sind die Lote x, y, z und die Seiten u, v, w, so ist:

$$u^2 = y^2 + z^2 + 2\,yz\cos\alpha,$$
$$v^2 = z^2 + x^2 + 2\,z\cos\beta,$$
$$w^2 = x^2 + y^2 + 2\,xy\cos\gamma, \text{ also}$$
$$u^2 + v^2 + w^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(yz\sin\alpha \cdot \cot\alpha + zx\sin\beta\cot\beta + xy\sin\gamma\cot\gamma).$$

Für den Punkt von Lemoine ist (Nr. 111)

$yz \sin\alpha = zx \sin\beta = xy \sin\gamma = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma)^2}$, somit ist:

$$u^2+v^2+w^2 = 2(x^2+y^2+z^2) + \frac{\Delta}{\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma} = \frac{3\,\Delta}{\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma}.$$

Um einzusehen, daß für das angegebene Dreieck die Summe der Quadrate der Seiten $u^2 + v^2 + w^2$ das Minimum ist, gehen wir von dem Satze aus: Sind 2 Punkte und eine Gerade gegeben, so ist für den Fußpunkt des Lotes vom Mittelpunkte der Verbindungslinie auf die Gerade die Summe der Quadrate der Verbindungslinien der gegebenen Punkte mit einem Punkte der Geraden ein Minimum. Es folgt dies leicht aus der Gleichung $(a + x)^2 + (a - x)^2 = 2a^2 + 2x^2$; wobei wir hier unter $2a$ die Projektion der Verbindungslinie der Punkte auf die Gerade und unter x den Abstand eines Punktes der Geraden vom Mittelpunkt der Projektion denken.

Denken wir uns nun Q und R als gegebene feste Punkte und suchen auf BC den Punkt P, für den $PQ^2 + PR^2$ ein Minimum ist, so muß das in P errichtete Lot durch den Mittelpunkt von QR gehen. Das Minimum $PQ^2 + QR^2 + RP^2$ findet also statt, wenn die in den Punkten P, Q, R zu den Seiten errichteten Lote die Schwerlinien von PQR sind. Diese Eigenschaft gilt aber für die Fußpunkte des Punkes von Lemoine (Nr. 111).

114. Die Verbindungslinien der Mitten der Seiten mit den Mitten der Höhen schneiden sich im Punkte von Lemoine.

Bew. (Fig. 63). Verbindet man den Mittelpunkt M_a von BC mit Spitze A, dem Punkte L und dem Pol P_a der Seite BC in Bezug auf den Umkreis, so sind diese Geraden in Verbindung mit der Seite BC 4 harmonische Strahlen, da die Symmediane AL_α durch LP_a harmonisch geteilt wird. Die Höhe von A auf BC ist parallel zu M_aP_a; es muß also das Stück derselben zwischen den Strahlen M_aA, M_aB durch den Strahl M_aL halbiert werden, d. h. M_aL halbiert die Höhe von A auf BC. Umgekehrt können wir sagen, die Verbindungslinie des Mittelpunktes einer Höhe mit dem Mittelpunkte der zugehörigen Seite geht durch den Punkt von Lemoine.

115. Zieht man in einem Dreieck die 3 Schwerlinien und die 3 Kreise durch je 2 Ecken und den Schwerpunkt, so ist der Mittelpunkt des Umkreises des ursprünglichen Dreiecks der Schwerpunkt des durch die 3 Mittelpunkte bestimmten Dreiecks und der Schwerpunkt des ersten Dreiecks der Punkt von Lemoine des zweiten Dreiecks.

Bew. (Fig. 64). Das Dreieck sei ABC, der Schwerpunkt sei S, der Mittelpunkt des Umkreises M; ferner seien P, Q, R die Mittel-

punkte der Umkreise, welche dem Satze entsprechen, nämlich von BCS, CAS, ABS. Ist dann D der Mittelpunkt von BC und schneidet der Umkreis Q die Seite BC in W, der Umkreis R dieselbe Seite in V, so ist $DV \cdot DB = DS \cdot DA = DW \cdot DC$, also $DV = DW$.

Fällt man von Q und R die Lote QQ_a, RR_a auf BC, so ist $BR_a = R_aV$, $CQ_a = Q_aW$, also auch $Q_aD = DR_a$. Nun ist RR_aQ_aQ ein Trapez mit den parallelen Seiten QQ_a und RR_a; der Mittelpunkt von Q_aR_a ist D, das in D auf BC errichtete Lot geht also durch den Mittelpunkt von QR, es geht aber auch durch M und P, ist also Schwerlinie im Dreieck PQR. Da diese Eigenschaft auch Bezug hat auf die andern Ecken, so folgt, daß M der Schwerpunkt von PQR ist.

Zeichnet man durch A, B, C die Lote zu den Schwerlinien, so erhält man ein Dreieck P'Q'R', welches dem aus den Schwerlinien gezeichneten und auch dem Dreieck PQR ähnlich ist. Es ist nämlich $QR \perp AS$, ebenso aber $Q'R' \perp AS$, also $QR \parallel Q'R'$, ebenso $RP \parallel R'P'$, $PQ \parallel P'Q'$.

Man sieht ferner ein, daß S der Ähnlichkeitspunkt der beiden Dreiecke PQR und P'Q'R' ist; also da (Nr. 111) S der Punkt von Lemoine im Dreieck P'Q'R' ist, so auch im Dreieck PQR.

Bem. Weitere Eigenschaften ergeben sich in Verbindung mit dem Brocardschen Kreise.

h. Einige Kreisscharen beim Dreieck.

116. Die Apollonischen Kreise des Dreiecks (d. h. die Kreise, deren Durchmesser die Stücke der Seiten sind, welche durch die innere und äußere Halbierungslinie des Gegenwinkels abgeschnitten werden) bilden eine Schar; ihre Schnittpunkte liegen auf der Verbindungslinie des Mittelpunktes des Umkreises mit dem Punkte von Lemoine.

Bew. (Fig. 65). Es sei ABC das Dreieck, die Winkelhalbierungslinien AD, AD', BE, BE', CF, CF'; es soll bewiesen werden, daß die Kreise mit den Durchmessern DD', EE', FF' eine Schar bilden. Nach Nr. 102 sind die Mittelpunkte dieser Strecken die Pole L_α', L_β', L_γ' der Symmedianen des Dreiecks. Da $L_\alpha'A$, $L_\beta'B$, $L_\gamma'C$ die Radien der Kreise sind, so schneiden die genanten Kreise den Umkreis rechtwinklig. Da ferner die Mittelpunkte L_α', L_β', L_γ' auf einer Geraden liegen, so bilden sie eine Schar. Da nun M der Mittelpunkt eines Kreises ist, der die 3 Kreise rechtwinklig schneidet, so liegt er auf der Potenzlinie der 3 Kreise. Die Potenzlinie ist senkrecht zur Centrale $L_\alpha'L_\beta'L_\gamma'$. Ist L der Punkt von Lemoine, so ist aber $ML \perp L_\alpha'L_\beta'L_\gamma'$, weil L der Pol von $L_\alpha'L_\beta'L_\gamma'$ ist. Auf dieser Linie müssen also die gemeinschaftlichen Punkte J, J' liegen.

Daß die Schnittpunkte der Kreise immer reell vorhanden sind, läßt sich leicht zeigen. Der Kreis um $L_{\alpha'}$ schneidet AC in reellen Punkten; der eine Punkt ist eben A; der Mittelpunkt des Kreises um $L_{\beta'}$ liegt auf AC und zwar innerhalb der geschnittenen Strecke; der ganze Kreis kann aber nicht innerhalb liegen, da der eine Punkt E jedenfalls außerhalb der geschnittenen Strecke liegt, der Kreis um $L_{\beta'}$ muß den andern also schneiden.

Bem. Diese Schnittpunkte J und J' werden als die isodynamischen Centren des Dreiecks bezeichnet.

117. Fällt man von den isodynamischen Centren des Dreiecks (den Schnittpunkten der apollonischen Kreise) die Lote auf die Dreiecksseiten, so ist das durch die Fußpunkte bestimmte Dreieck gleichseitig.

Bew. (Fig. 65). Die Bezeichnung ist wie in Nr. 116, die Fußpunkte von dem Punkte J seien J_a, J_b, J_c. Nach dem Satze des Apollonius ist $JB : JC = c : b = \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$. Ebenso $JA : JC = \frac{1}{a} : \frac{1}{c}$, also $JA = \frac{\lambda}{a}$, $JB = \frac{\lambda}{b}$, $JC = \frac{\lambda}{c}$, wo λ ein unbestimmter Faktor ist. BJ_aJJ_c ist ein Kreisviereck, so daß JB der Durchmesser des Kreises ist. Daraus folgt $J_aJ_c = \frac{\lambda}{b} \cdot \sin\beta = \frac{\lambda}{2r}$; ebenso also $J_bJ_a = \frac{\lambda}{2r}$, $J_cJ_b = \frac{\lambda}{2r}$, oder $J_aJ_b = J_bJ_c = J_cJ_a$.

Bem. Daß auch das Dreieck gleichseitig ist, welches durch J' erhalten wird, bedarf keines besondern Beweises. Auch ist leicht einzusehen, daß diejenigen Dreiecke gleichseitig sind, welche man erhält, wenn man die idosynamischen Centra mit den Ecken des Dreiecks verbindet und die Schnittpunkte dieser Linien mit dem Umkreise als Ecken nimmt.

118. Die isodynamischen Centren (116) des Dreiecks sind die Gegenpunkte von denjenigen Punkten, welche man erhält, wenn man über den Seiten gleichseitige Dreiecke zeichnet und die Spitzen derselben mit den bezüglichen Ecken des Grunddreiecks verbindet.

Bew. (Fig. 65). Daß der Beweis für die beiden Punkte keine besonderen Verschiedenheiten bieten kann, ist klar, es kann also der Beweis für einen Punkt genügen. Ist kein Dreieckswinkel über 120^0, so wird ein solcher Punkt stets innerhalb des Dreiecks liegen. Nennen wir K den Schnittpunkt derjenigen Geraden, welche erhalten werden, wenn die gleichseitigen Dreiecke und das Grunddreieck durch die Dreiecksseite getrennt werden, so daß sie in verschiedenen Ebenteilen liegen, so ist bekannt, daß $K(BC) = K(CA) = K(AB) = 120^0$ ist. Ist also $J(BC) = 60^0 + \alpha$, $J(CA) = 60^0 + \beta$, $J(AB) = 60^0 + \gamma$, so ist J der Gegen-

punkt. (Nr. 100). — $J(BJ_a) = J_c(BJ_a)$, $J(J_aC) = J_b(J_aC)$, also $J(BC) = J_c(BJ_a) + J_b(J_aC) = 180^0 - J_c(AJ_a) + 180^0 - J_b(AJ_a)$
$= \alpha + J_a(J_bJ_c) = \alpha + 60^0$.

119. Nimmt man ein isodynamisches Centrum des Dreiecks als Mittelpunkt eines Transformationskreises und transformiert die Ecken mittelst des Princips der reciproken Radien, so ist das dadurch bestimmte Dreieck gleichseitig.

Bew. Ist ABC das Grunddreieck und J ein isodynamisches Centrum, σ der Radius des Transformationskreises, $A_1B_1C_1$ das transformierte Dreieck, so hat man:

$$A_1B_1 = \frac{\sigma^2 \cdot AB}{JA \cdot JB'}, \quad B_1C_1 = \frac{\sigma^2 \cdot BC}{JB \cdot JC'}, \quad C_1A_1 = \frac{\sigma^2 \cdot CA}{JC \cdot JA'}.$$

Nun ist $JC = \frac{\lambda}{AB'}$, $JA = \frac{\lambda}{BC'}$, $JB = \frac{\lambda}{CA'}$, also

$$A_1B_1 = \frac{\sigma^2 \cdot \lambda}{JA \cdot JB \cdot JC} = B_1C_1 = C_1A_1.$$

120. Die Potenzlinie zwischen dem Umkreise und dem Feuerbachschen Kreise des Dreiecks ist die Kollineationsachse, welche zum Grunddreieck und dem Höhenfußpunktdreieck gehört.

Bew. (Fig. 66). Die Bezeichnung zunächst wie gewöhnlich, ABC das Dreieck, $M_aM_bM_c$ das Mittendreieck, H_a, H_b, H_c die Höhenfußpunkte, H_a' der Schnittpunkt von BC mit H_bH_c 2c. S der Schwerpunkt, F der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises. Es ist $H_a'H_b'H_c'$ die Kollineationsachse zwischen ABC und $H_aH_bH_c$. Da man durch BCH_bH_c einen Kreis legen kann, so ist:

$$H_a'B \cdot H_a'C = H_a'H_b \cdot H_a'H_c.$$

Weil der Feuerbachsche Kreis durch $H_aM_aH_bH_c$ geht, so ist auch $H_a'H_a \cdot H_a'M_a = H_a'H_b \cdot H_a'H_c$, also $H_a'B \cdot H_a'C = H_a'H_a \cdot H_a'M_a$, woraus folgt, daß H_a' die gleiche Potenz für den Umkreis, wie für den Feuerbachschen Kreis besitzt. Dasselbe läßt sich von H_b' und H_c' beweisen, so daß $H_a'H_b'H_c'$ die Potenzlinie für beide Kreise ist.

Da die Centrale der Kreise die Eulersche Linie ist, so steht dieselbe zu jener Potenzlinie senkrecht.

121. Das Lot vom Höhenschnittpunkt auf die Schwerlinie AM_a geht durch H_a', d. h. durch den Punkt, in welchem die der Schwerlinie entsprechende Seite durch die entsprechende Seite des Höhenfußpunktdreiecks geschnitten wird.

Bew. (Fig. 66). Die Bezeichnung wie vorher, das Lot von H auf die Schwerlinie treffe dieselbe in N_a, dann liegen $AH_cHN_aH_b$ auf

einem Kreise mit dem Durchmesser AH. Dieser Kreis wird von M_aH_b und M_aH_c berührt, da $H_c(H_bM_a) = H_b(H_cM_a) = \alpha$ ist, also ist im Dreieck AH_bH_c die Gerade AM_a die Symmediane. Dies folgt übrigens auch daraus, daß $AH_bH_c \infty ABC$ und AM_a in ABC die Schwerlinie ist. Da nun H_bH_c die Polare von M_a in dem Kreise durch $AH_bN_aHH_c$ ist, so wird AN_a durch M_a und den Schnittpunkt mit H_bH_c harmonisch geteilt. Ebenso wird AH durch H_a und den Schnittpunkt mit H_bH_c harmonisch geteilt; folglich müssen H_bH_c, N_aH, M_aH_a oder BC sich in demselben Punkte, das ist hier H_a', schneiden.

122. Der Kreis, dessen Durchmesser die Strecke der Eulerschen Geraden zwischen Schwerpunkt und Höhenschnittpunkt ist, gehört zu der Schar, welche durch den Umkreis und den Feuerbachschen Kreis bestimmt ist.

Bew. (Fig. 66). Bezeichnung wie vorher; $HH_aM_aN_a$ bilden ein Kreisviereck, da die Winkel bei H_a und N_a rechte sind. Es ist also $H_a'H \cdot H_a'N_a = H_a'H_a \cdot H_a'M_a$. Das erste Produkt ist auch die Potenz des Punktes H_a' in Bezug auf den Kreis über der Entfernung zwischen Schwerpunkt und Höhenschnittpunkt als Durchmesser; das zweite ist die Potenz desselben Punktes in Bezug auf den Feuerbachschen Kreis. Da also H_a', ebenso H_b', H_c' für beide Kreise dieselbe Potenz haben, so ist $H_a'H_b'H_c'$ die Potenzlinie der beiden Kreise.

123. Der Polarkreis, d. h. der Kreis, für den das Dreieck ein harmonisches Tripel ist, gehört zur Schar, die durch den Umkreis und den Feuerbachschen Kreis bestimmt ist.

Bew. (Fig. 67). Soll der Kreis reell vorhanden sein, so muß das Dreieck stumpfwinklig sein; wir wollen daher ein solches voraussetzen. Die Bezeichnung sei der Hauptsache nach die frühere. Wir legen ferner noch den Kreis um M_a, welcher durch B und C geht, derselbe möge die Höhe AH_a in X und X' treffen, wobei dann $H_aX' = XH_a$ ist. Der Radius des Polarkreises ist $\sqrt{HH_b \cdot HB} = \sqrt{HH_c \cdot HC}$, der Polarkreis schneidet also den um M_a gelegten rechtwinklig. Da ferner BC durch $H_a'H_a$ harmonisch geteilt wird, so ist XX' die Polare von H_a' in Bezug auf den Kreis um M_a, daher $H_a'X$ Tangente an diesen Kreis. Der um H_a' mit $H_a'X$ geschlagene Kreis schneidet also den um M_a gelegten Kreis rechtwinklig, wie auch jeden durch BC gelegten, somit auch den Umkreis von ABC. Es ist ferner $HH_b \cdot HB = HX \cdot HX'$, da H_b, B, X, X' auf einem Kreise liegen; also schneidet der Polarkreis auch den Kreis um H_a' mit $H_a'X$ gelegten Kreis rechtwinklig. Da also der um H_a' gelegte Kreis den Umkreis und den Polarkreis rechtwinklig schneidet, so liegt H_a' auf der

Potenzlinie der beiden Kreise; da dasselbe für H_b' und H_c' gilt, so ist $H_a'H_b'H_c'$ auch Potenzlinie für diese Kreise.

124. Der Kreis, der durch die Pole der Seiten eines Dreiecks in Bezug auf den Umkreis geht, gehört zu der Schar, die durch den Umkreis und den Feuerbachschen Kreis bestimmt wird.

Bew. Sind P_a, P_b, P_c die Pole, M der Mittelpunkt des Umkreises und M_a, M_b, M_c die Mittelpunkte der Seiten, so ist $MM_a \cdot MP_a = MM_b \cdot MP_b = MM_c \cdot MP_c = r^2$, also M ein Ähnlichkeitspunkt der Kreise, welche durch $M_aM_bM_c$ und $P_aP_bP_c$ gehen. Ist das Dreieck spitzwinklig, so ist M offenbar der innere, im andern Falle der äußere Ähnlichkeitspunkt. Der Umkreis ist ferner der Potenzkreis jener beiden Kreise, der also derselben Schar angehört. Wir können umgekehrt sagen, der durch $P_aP_bP_c$ gelegte Kreis gehört der Schar der beiden andern an.

125. Zieht man in einem Dreieck ABC die Mittelsenkrechten zu den Seiten, bestimmt die Schnittpunkte mit den andern Seiten (wobei wir den Schnittpunkten mit denjenigen Seiten, welche in der Reihe BC, CA, AB auf die Seiten folgen, den Index 1, den andern den Index 2 geben, der an den Buchstaben gesetzt wird, der auf der Seite nicht vorhanden ist), so daß man die Punkte A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 erhält, so bilden die Umkreise von $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ und der Umkreis von ABC selbst eine Kreisschar. Man kann auch solche Dreiecke nehmen, welche durch Vertauschung der Punkte auf den Loten entstehen z. B. $A_1C_1C_2$, $A_2B_1B_2$ und ABC ꝛc.

Bew. Aus den Sätzen von Pol und Polare folgt leicht, daß (Fig. 68) B_1 und C_2, C_1 und A_2, A_1 und B_2 reciproke Punkte sind; also ist $MB_1 \cdot MC_2 = MC_1 \cdot MA_2 = MA_1 \cdot MB_2$, also der Mittelpunkt M ein Ähnlichkeitspunkt und der Umkreis der Potenzkreis der beiden Kreise, der somit zur Schar jener Kreise gehört.

Was die Potenzlinie der Kreise betrifft, so wollen wir die von den Kreisen $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ bestimmen. Analoge Untersuchungen werden auch die entsprechenden Potenzlinien der andern Kreisscharen bestimmen.

A_1C_1 und A_2B_2 mögen sich in A_3 schneiden, ebenso B_1A_1 und B_2C_2 in B_3, C_1B_1 und C_2A_2 in C_3. Es ist BCB_2C_1 ein Kreisviereck, da B_2C_1 der Verbindungslinie der Höhenfußpunkte auf AB und AC parallel ist. Es ist auch $HBC \sim MA_1A_2$ (wo H der Höhenschnittpunkt ist), also auch $C_1B_2A_1A_2$ ein Kreisviereck. Da noch $MA_2 \cdot MC_1 = MA_1 \cdot MB_2 = r^2$ ist, so schneidet der Kreis X um $C_1B_2A_1A_2$ den

Umkreis von ABC rechtwinklig. Es folgt ferner leicht, daß A_3 auf der Polare von M in Bezug auf den genannten Kreis X liegt. Wenn sich aber 2 Kreise rechtwinklig schneiden, so ist die Polare des Mittelpunktes eines Kreises in Bezug auf den andern die Potenzlinie der Kreise. Denken wir uns nun die Kreise $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ gelegt, so ist zunächst $A_2A_3 \cdot A_3B_2 = A_1A_3 \cdot A_3C_1$, also hat A_3 für die Kreise $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ gleiche Potenzen, aber auch für den Kreis X bez. für ABC dieselbe Potenz. Dasselbe läßt sich von B_3 und C_3 behaupten, so daß $A_3B_3C_3$ die Potenzlinie der 3 Kreise ist.

Bem. Satz 88 in Verbindung mit diesem geben noch manche Folgerungen.

i) Beziehungen eines Grunddreiecks zu dem Dreieck, dessen Ecken die Spiegelpunkte der zu den Seiten gehörigen Umkreisbogenmittelpunkte in Bezug auf diese Seiten sind.

126. Erklärung. Der Kürze wegen sei die in Nr. 23 angegebene Bezeichnung hier ebenfalls festgehalten. Die Mittelpunkte der Bogen auf dem Umkreise, welche durch die Seiten abgeschnitten werden, seien A_1, B_1, C_1, die Spiegelpunkte derselben in Bezug auf die entsprechenden Seiten A_2, B_2, C_2; ferner A_3, B_3, C_3 die Mittelpunkte der Bogen, welche mit dem Dreieck in demselben Flächenteile liegen, also die zweiten Endpunkte der Durchmesser, auf denen A_1, B_1, C_1 liegen. Endlich soll N der Punkt von Nagel sein, d. h. der Schnittpunkt von AO_a', BO_b'', CO_c'''. Weiter vorkommende Gebilde sollen ihre Bezeichnung an der Stelle erhalten, wo sie eingeführt werden. Das Dreieck $A_2B_2C_2$, das hier untersucht wird, soll der Kürze halber als das Spiegeldreieck bezeichnet werden, während $A_1B_1C_1$ das Bogenmittendreieck heißen soll.

127. Das Spiegeldreieck $(A_2B_2C_2)$ ist dem Bogenmittendreieck $(A_1B_1C_1)$ ähnlich, enthält also die Winkel $90^0 - \frac{\alpha}{2}$, $90^0 - \frac{\beta}{2}$, $90^0 - \frac{\gamma}{2}$, und der zum Spiegeldreieck gehörige Umkreis geht durch den Höhenschnittpunkt und den Punkt von Nagel N des Grunddreiecks.

Bew. (Fig. 69). Es ist $A_3A_2 = AH$, $B_3B_2 = BH$, $C_3C_2 = CH$, was aus der Gleichung $2MM_a = AH$ ꝛc. folgt; daher AHA_2A_3 ein Parallelogramm; da $AA_3 \perp AO$ ist, so auch $HA_2 \perp AO$, ebenso $HB_2 \perp BO$, $HC_2 \perp CO$.

Es ist ferner $AN = 2M_aO$, auch $AN \parallel MO$. Verlängert man also AO um sich selbst bis N_a, so liegen NM_aN_a in einer Geraden, so

daß zugleich $NM_a = M_aN_a$ ist. Da nun auch $A_2M_a = M_aA_1$ ist, so ist $N_aA_1NA_2$ ein Parallelogramm und $NA_2 \parallel A_1N$, d. h. $NA_2 \parallel AA_1$ oder AO. Da also $HA_2 \perp AO$ ist, so ist $NA_2 \parallel AO$ oder $NA_2 \perp HA_2$; es geht somit der über HN als Durchmesser beschriebene Kreis durch A_2, ebenso natürlich durch B_2 und C_2.

Da ferner $C_1A = C_1O$ und $B_1A = B_1O$, so ist B_1C_1 die Mittelsenkrechte von AO und $A_1O \perp B_1C_1$; hieraus folgt, daß O der Höhenschnittpunkt von $A_1B_1C_1$ ist. Es ist ferner $HA_2 \parallel B_1C_1$, $HB_2 \parallel A_1C_1$, also $H(A_2B_2) = C_1(B_1A_1)$ oder auch $C_2(A_2B_2) = C_1(B_1A_1)$. Dasselbe gilt natürlich auch von den andern Winkeln der Dreiecke $A_2B_2C_2$ und $A_1B_1C_1$, daher $A_2B_2C_2 \sim A_1B_1C_1$, dessen Winkel $90^0 - \frac{\alpha}{2}$, $90^0 - \frac{\beta}{2}$, $90^0 - \frac{\gamma}{2}$ sind.

128. Ist P der Mittelpunkt des Umkreises von $A_2B_2C_2$, so ist $POMN$ ein Parallelogramm.

Bew. (Fig. 69). Da $M_aO \parallel AN$, $M_bO \parallel BN$, $M_cO \parallel CN$ ist, so entspricht O im Dreieck $M_aM_bM_c$ dem Punkt N im Dreieck ABC, d. h. es ist der Punkt von Nagel in $M_aM_bM_c$; da ferner dem Punkte H in ABC der Punkt M in $M_aM_bM_c$ entspricht, so ist $MO = \frac{1}{2}HN$, also $MO = PN$. Da auch $MO \parallel PN$ ist, so ist $POMN$ ein Parallelogramm.

129. Die von den Ecken des Grunddreiecks auf die entsprechenden Seiten des Spiegeldreiecks gefällten Lote schneiden sich in einem Punkte R und die Kollineationsachse zwischen dem Bogenmittendreieck und dem Spiegeldreieck ist die Mittelsenkrechte von OR.

Bew. Es sei R der Schnittpunkt der Lote von A und B auf B_2C_2 bez. C_2A_2, dann müssen sich diese Lote unter dem Winkel $C_2(A_2B_2)$ oder seinem Nebenwinkel schneiden, also unter $90^0 - \frac{\gamma}{2}$ oder $90^0 + \frac{\gamma}{2}$. Nun ist $C_2(BA) = C_1(BA) = 180^0 - \gamma$, also C_2 der Mittelpunkt eines Kreises, der durch ABR geht; das von C_2 auf AR gefällte Lot halbiert also AR. Da nun $B_2C_2 \perp RA$ ist, so ist R der Spiegelpunkt von A in Bezug auf B_2C_2; ebenso ist R der Spiegelpunkt von B in Bezug auf C_2A_2. A_2 ist von B und R, auch von B und C, also auch von C und R gleich weit entfernt; ebenso beweist man, daß B_2 von C und R gleich weit entfernt ist, es ist also R auch der Spiegelpunkt von C in Bezug auf A_2B_2 oder also: Die von A, B, C auf die Seiten bez. B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 gefällten Lote schneiden sich

in einem Punkte R, der zugleich der Spiegelpunkt der Ecken des Grunddreiecks ABC in Bezug auf die entsprechenden Seiten des Spiegeldreiecks ist.

Es mögen sich nun A_1B_1 und A_2B_2 in W schneiden. Da A_1B_1 die Mittelsenkrechte von CO ist und W auf A_1B_1 liegt, so ist $WC = WO$. Da A_2B_2 die Mittelsenkrechte von CR ist und W auch auf A_2B_2 liegt, so ist auch $WC = WR$, also $WO = WR$. Schneidet B_1C_1 die Gerade B_2C_2 in U, C_1A_1 die Gerade C_2A_2 in V, so folgt ebenso $UO = UR$, $VO = VR$, also sind U, V, W von O und R gleich weit entfernt; die Kollineationsachse UVW der Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ ist also die Mittelsenkrechte von OR.

130. Schneidet man auf den Höhen von den Ecken gerechnet den Durchmesser des Inkreises ab, so erhält man dadurch die Ecken eines Dreiecks $A_4B_4C_4$, das dem Grunddreieck ABC ähnlich und dem Umkreise des Spiegeldreiecks $A_2B_2C_2$ eingeschrieben ist.

Bem. Wie schon bemerkt, ist O der Punkt von Nagel im Dreieck $M_aM_bM_c$; da nun O von BC den Abstand ρ hat, so muß N von der Parallelen durch A zu BC den Abstand 2ρ haben. Schneidet man also $AA_4 = 2\rho$ von der Höhe ab, so ist $NA_4 \parallel BC$, also $A_4(AN)$ oder $A_4(HN) = 1R$, es liegt also A_4 auf einem Kreise, dessen Durchmesser HN ist; dasselbe gilt von den entsprechend bestimmten Punkten B_4 und C_4. Ferner ist $NA_4 \parallel BC$, $NB_4 \parallel AO$, also $N(A_4B_4) = C(BA)$ oder $C_4(A_4B_4) = C(BA)$. Dasselbe gilt von den andern Winkeln.

131. Der Punkt O hat für die Dreiecke $A_4B_4C_4$ und ABC dieselbe Bedeutung, ebenso für die Dreiecke $A_2B_2C_2$ und $A_1B_1C_1$.

Bew. Da $AA_4 = 2\rho$ ist, so ist $AA_4 : A_1A_2 = \rho : M_aA_1 = OO_c : M_aA_1$. Es ist $AOO_c \sim BM_aA_1$, also $OO_c : M_aA_1 = AO : A_1B = AO : A_1O$, also $AA_4 : A_1A_2 = AO : OA_1$, daher muß A_2O durch A_4 gehen und es ist $AO : OA_1 = A_4O : OA_2$. Da ebenso $BO : OB_1 = B_4O : OB_2$, $CO : OC_1 = C_4O : OC_2$ ist, so ist der Satz damit bewiesen. Es ist also O der Höhenschnittpunkt von $A_2B_2C_2$ und der Mittelpunkt des Inkreises von $A_4B_4C_4$.

132. Hilfssatz. Hat man 4 harmonische Punkte AA_1BB_1, wo AA_1 durch BB_1 harmonisch geteilt ist, halbiert AA_1 in M und bestimmt zu MA_1B den vierten harmonischen B konjugierten Punkt N, so ist $NB_1 \cdot NM = NA_1^2$.

Bew. (Fig. 70). Es sei $AA_1 = a$, $AB = \frac{a}{1+\lambda}$, also $BA_1 =$

$\frac{a\lambda}{1+\lambda}$, dann ist $AB_1 = \frac{a}{1-\lambda}$, $A_1B_1 = \frac{a\lambda}{1-\lambda}$, $MB = \frac{a}{1+\lambda} - \frac{a}{2} = \frac{a(1-\lambda)}{2(1+\lambda)}$, daher

$$\frac{MN}{A_1N} = \frac{a(1-\lambda)}{2(1+\lambda)} : \frac{a\lambda}{1+\lambda} = \frac{1-\lambda}{2\lambda}, \text{ also}$$

$$MN = \frac{a(1-\lambda)}{2(1-3\lambda)}, \quad A_1N = \frac{a\lambda}{1-3\lambda},$$

$$B_1N = A_1N - A_1B_1 = \frac{a\lambda}{1-3\lambda} - \frac{a\lambda}{1-\lambda} = \frac{2a\lambda^2}{(1-\lambda)(1-3\lambda)},$$

$$\text{also } NB_1 \cdot NM = \frac{a^2\lambda^2}{(1-3\lambda)^2} = NA_1^2.$$

133. Wenn man die Ecken des Spiegeldreiecks mit dem Mittelpunkt des Inkreises des Grunddreiecks verbindet und die Schnittpunkte der erhaltenen Geraden mit den entsprechenden Seiten des Grunddreiecks bestimmt, so haben diese Schnittpunkte gleiche Potenz in Bezug auf den Inkreis und den Feuerbachschen Kreis.

Bew. (Fig. 69). Es sei U_1 der Schnittpunkt von BC mit A_2O, so wird M_aO_a durch O_aU_1 harmonisch geteilt. Es ist nämlich $O(A_2A_1M_aO_a)$ ein harmonisches Strahlenbüschel, also wird BC durch diese Strahlen harmonisch geteilt, d. h. M_aO_a durch O_aU_1. Es ist nun M_a der Mittelpunkt von O_aO_a', welches durch O_aH_a harmonisch geteilt wird. Nach Nr. 132 ist also:

$$U_1H_a \cdot U_1M_a = U_1O_a^2.$$

$U_1H_a \cdot U_1M_a$ ist die Potenz von U_1 in Bezug auf den Feuerbachschen Kreis, $\overline{U_1O_a}^2$ aber die Potenz in Bezug auf den Inkreis von ABC. Dasselbe gilt für die entsprechend bestimmten Punkte V_1, W_1, so daß $U_1V_1W_1$ die Potenzlinie der angegebenen Kreise ist.

134. Die Entfernung OR, d. h. des Mittelpunktes des Inkreises vom Schnittpunkt der Lote von den Ecken des Grunddreiecks auf die entsprechenden Seiten des Spiegeldreiecks ist gleich dem Durchmesser des Inkreises.

Bew. (Fig. 69). Nach Nr. 131 ist A_2B_2 die Mittelsenkrechte von OC_4, auch die von CR, also $CROC_4$ ein gleichschenkliges Trapez, daher $OR = CC_4 = 2\rho$.

135. Die Kollineationsachse UVW der Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ d. h. des Bogenmittendreiecks und des Spiegeldreiecks ist Tangente an den Inkreis und die Potenzlinie zwischen dem Umkreise des Spiegeldreiecks und dem Mittelpunkt des Inkreises. Folgerungen.

Bew. (Fig. 69). Es ist $WR = WO = WC_4 = WC$, also W der Mittelpunkt des durch ROC gelegten Kreises; ferner ist $A_4B_4C_4 \sim ABC$, also da P der Mittelpunkt des Umkreises von $A_4B_4C_4$ und O Mittelpunkt des Inkreises ist, so ist $C_4(PO) = \frac{\alpha - \beta}{2}$, auch ist $C(C_4O) = \frac{\alpha - \beta}{2}$, also ist PC_4 Tangente an den Kreis mit dem Mittelpunkt W. Dieser Kreis schneidet also den Umkreis von $A_4B_4C_4$ rechtwinklig und WC_4 ist Tangente an den Umkreis von $A_4B_4C_4$. Analoges gilt für die Kreise von U mit UA_4, von V mit VB_4 geschlagen. Da diese Kreise durch O gehen und den Umkreis von $A_4B_4C_4$ rechtwinklig schneiden, so ist UVW die Potenzlinie zwischen diesem Kreise und Punkt O.

Ist dann Q der Mittelpunkt von OR, so ist $OQ = \rho$; da nun $OQ \perp UVW$ ist, so berührt der mit OQ von O beschriebene Kreis d. h. der Inkreis die Gerade UVW.

Daran schließen sich noch einige Folgerungen. Da die durch O und R gehenden Kreise den Umkreis P rechtwinklig schneiden, so sind O und R reciproke Punkte, dieselben liegen also mit dem Mittelpunkte P in einer Geraden. Setzen wir noch $MO = e$, so ist also, da $PN = MO$ ist, $e^2 = PO \cdot PR$; wenn wir $PR = x$ setzen, erhalten wir die Gleichung $r^2 - 2r\rho = x(x - 2\rho)$, also $x = r$.

136. Die um die Punkte U_1, V_1, W_1 durch den Mittelpunkt O des Inkreises gehenden Kreise schneiden den Umkreis des Spiegeldreiecks rechtwinklig, daher liegen U_1, V_1, W_1 auf der Kollineationsachse der Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$.

Bew. (Fig. 69). Es ist (Nr. 133) $U_1O_a^2 = U_1H_a \cdot U_1M_a$, folglich auch wegen der Proportionalität der Linien: $U_1O^2 = U_1A_4 \cdot U_1A_2$, also U_1O gleich der Tangente von U_1 an den Umkreis von $A_2B_2C_2$; der mit U_1O um U_1 geschlagene Kreis schneidet jenen Kreis also rechtwinklig. Dasselbe thun die von V_1 und W_1 durch O gelegten Kreise, dieselben gehören also zu derselben Schar wie die von den Punkten U, V, W durch O gelegten Kreise. Daher liegen U, V, W, U_1, V_1, W_1 auf derselben Geraden, welche die Potenzlinie zwischen O und dem Umkreise von $A_2B_2C_2$ ist.

137. Satz von Feuerbach. Der Inkreis und der Feuerbachsche Kreis berühren sich.

Bew. (Fig. 69). Es ist $U_1V_1W_1$ oder UVW die Potenzlinie des Inkreises mit dem Feuerbachschen Kreise. Da UVW den Inkreis in dem Mittelpunkte Q von OR berührt, so muß diese Gerade den Feuerbachschen Kreis in demselben Punkte berühren; dieselben berühren sich also gegenseitig.

138. Die Lote von den Ecken des Bogenmittendreiecks auf die entsprechenden Seiten des Spiegeldreiecks schneiden sich in einem Punkte L, der dem Nagelschen Punkte N auf dem Umkreise von $A_2B_2C_2$ entspricht, auch auf der Geraden MN, der Verbindungslinie des Nagelschen Punktes mit dem Mittelpunkte des Umkreises liegt.

Bew. (Fig. 69). Daß die Lote von A_1 auf B_2C_2 und von B_1 auf C_2A_2 sich auf dem Umkreise des Grunddreiecks schneiden, folgt leicht aus dem Satze vom Peripheriewinkel. Verbindet man alsdann den Schnittpunkt L der Lote mit C_1, so folgt $L(B_1C_1) = A_1(B_1C_1) = A_2(C_2B_2)$. Ist also B_t der Schnittpunkt von LB_1 mit A_2C_2, und C_t der Schnittpunkt von LC, mit A_2B_2, so ist $A_2B_tLC_t$ ein Kreisviereck, also $C_t(LA_2) = 1\,R$, d. h. das von C_1 auf A_2B_2 gefällte Lot geht ebenfalls durch L.

Es ist ferner $NA_2 \perp B_1C_1$, $C_1C_t \perp A_2B_2$, daher $A_2(C_tN) = C_1(B_1L)$ oder $A_2(B_2N) = A_1(B_1L)$, daher auch die zweite Behauptung richtig.

Die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ sind ähnlich mit O als Situationspunkt, daher müssen die Verbindungslinien entsprechender Linien gleiche Winkel einschließen, es ist somit $P(ON) = M(OL)$. Da aber $P(ON) = M(ON)$ ist, so auch $M(ON) = M(OL)$ oder MNL liegen in einer Geraden.

139. Die Lote von A auf B_4C_4, von B auf C_4A_4, von C auf A_4B_4 schneiden sich in einem Punkte T des Umkreises von ABC, der dem Punkte H auf dem Umkreise des Spiegeldreiecks entspricht.

Bew. (Fig. 69). Das erste ist genau so zu beweisen, wie der entsprechende Teil des Satzes in Nr. 138, so daß also T auf dem Umkreise von ABC liegt. Ferner ist $HA_4 \perp BC$, $CT \perp B_4A_4$, also $A_4(HB_4) = C(BT) = A(BT)$, so daß T der Lage von H entspricht. Da sich nun auch N und L entsprechen, so liegt T auf dem Durchmesser, auf dem L liegt, woraus noch folgt:
$AL \parallel B_4C_4$, $BL \parallel C_4A_4$, $CL \parallel A_4B_4$.

140. Die Gegentransversalen der nach dem Punkte L hingehenden Ecktransversalen des Grunddreiecks sind senkrecht zu HN, der Verbindungslinie des Höhenschnittpunkts mit dem Punkte von Nagel.

Bew. Zieht man $LL' \parallel AB$, wo L' auf dem Umkreise liegt, so ist CL' die Gegentransversale von CL. Ferner $H(CN) = L'(CL)$; da nun $CH \perp LL'$, so auch $HN \perp CL'$. Daß die Gegentransversalen von AL und BL parallel CL' sind, ist bekannt.

Nebenbei sei die Folgerung erwähnt, daß die Simsonsche Gerade von L parallel HN, die von T senkrecht zu HN ist.

141. Die Kollineationsachse der Dreiecke $A_4B_4C_4$ und ABC ist senkrecht zur Geraden HT.

Bew. (Fig. 69). Es mögen sich B_4C_4 und BC in X, C_4A_4 und CA in Y, A_4B_4 und AB in Z schneiden, dann ist also XYZ die Kollineationsachse der Dreiecke $A_4B_4C_4$ und ABC. Da nun $CT \perp A_4B_4$ ist, so folgt sofort:

$$A_4T^2 - A_4C^2 = ZT^2 - ZC^2,$$
$$ZT^2 = A_4T^2 - A_4C^2 + ZC^2; \text{ ebenso}$$
$$YT^2 = A_4T^2 - A_4B^2 + BY^2, \text{ also}$$
$$ZT^2 - YT^2 = A_4B^2 - A_4C^2 + CZ^2 - BY^2,$$

oder da $HA_4 \perp BC$ ist,

$$ZT^2 - YT^2 = HB^2 - HC^2 + CZ^2 - BY^2.$$

Es ist $CZ^2 = BZ^2 + a^2 - 2a \cdot BZ \cos\beta$,

$BY^2 = CY^2 + a^2 - 2a \cdot CY \cdot \cos\gamma$, also

$$CZ^2 - BY^2 = BZ^2 - CY^2 - 4r \sin\alpha\,(BZ\cos\beta - CY\cos\gamma);$$

somit

$$\alpha)\quad ZT^2 - YT^2 = HB^2 - HC^2 + BZ^2 - CY^2 - 4r\sin\alpha\,(BZ\cos\beta - CY\cos\gamma).$$

Aus den Dreiecken ZBH und YCH folgt:

$$ZH^2 = BZ^2 + BH^2 - 2BZ \cdot BH \sin\alpha = BZ^2 + BH^2 - 4r\sin\alpha\, BZ\cos\beta$$
$$YH^2 = CY^2 + CH^2 - 2CY \cdot CH \cdot \sin\alpha = CY^2 + CH^2 - 4r\sin\alpha\, CY\cos\gamma,$$

also

$$\beta)\quad ZH^2 - YH^2 = BZ^2 - CY^2 + BH^2 - CH^2 - 4r\sin\alpha\,(BZ\cos\beta - CY\cos\gamma),$$

somit in Verbindung mit α)

$$ZT^2 - YT^2 = ZH^2 - YH^2,$$

woraus folgt

$$HT \perp YZ.$$

Bem. Diese Figur bietet noch manche andere Eigenschaften, die jedoch nur nebenbei erwähnt werden mögen, da ihr Beweis vorzugsweise die Durchführung von Rechnungen verlangt. Bei diesen Rechnungen handelt es sich wesentlich um die Umformung trigonometrischer Funktionen. Es gilt folgender Satz:

Zieht man in dem Umkreise eines Dreiecks den Durchmesser, welcher durch den Mittelpunkt des Inkreises geht, und trägt die Teile des Durchmessers, die man durch den Mittelpunkt des Inkreises als Teilpunkt er-

hält, auf den Dreieckshöhen auf (von der Spitze gerechnet), so liegen sowohl die 3 Punkte des einen, als auch des andern Systems auf einer Geraden. Beide Gerade gehen durch den Mittelpunkt des Inkreises und stehen aufeinander senkrecht.

Trägt man ferner den Radius des Umkreises auf den Höhen auf, so erhält man durch die Endpunkte ein Dreieck, welches dem Spiegeldreieck kongruent ist. Die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken schneiden sich im Mittelpunkte des Feuerbachschen Kreises.

Anhang.

Einiges aus der Brocardschen Geometrie.

Erster Teil.

Die grundlegenden und elementaren Eigenschaften der Brocardschen Geometrie.

1. Die Bezeichnung ist der Hauptsache nach die frühere, so daß ABC ein Grunddreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ ist. Der Inhalt ist Δ. Der Fußpunkt des Lotes von einem Punkte P auf die Seite a wird mit P_a bezeichnet, während der Schnittpunkt der durch A gehenden Ecktransversale mit der Gegenseite die Bezeichnung P_α erhält. Was hiernach P_b, P_c, P_β, P_γ bezeichnet, ist ersichtlich. Sonstige Punkte und Gerade erhalten ihre Bezeichnung beim Auftreten.

2. In jedem Dreieck giebt es 2 Punkte L′ und L″, für welche $A(BL') = B(CL') = C(AL') = A(CL'') = B(AL'') = C(BL'')$ ist. Diese Punkte heißen die Brocardschen, und zwar genauer, L′ heißt der erste oder positive oder indirekte Punkt von Brocard, L″ der zweite oder negative oder direkte Punkt von Brocard.

Der dazu gehörige Winkel A(BL′), der mit ω bezeichnet werden soll, heißt der Brocardsche.*) Für ihn gilt die Relation:

$$\cot\omega = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}.$$

Bew. (Fig. 70). Man findet zunächst die Gleichungen:

$$\frac{AL'}{BL'} = \frac{\sin(\beta - \omega)}{\sin\omega}, \quad \frac{BL'}{CL'} = \frac{\sin(\gamma - \omega)}{\sin\omega}, \quad \frac{CL'}{AL'} = \frac{\sin(\alpha - \omega)}{\sin\omega},$$

*) Siehe den Artikel von Schlömilch in der Zeitschrift von J. C. V. Hoffmann, Bd. XX Jahrg. 1889 pag. 401 ff.

ähnlich $\frac{AL''}{BL''} = \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\omega)}$, $\frac{BL''}{CL''} = \frac{\sin\omega}{\sin(\beta-\omega)}$, $\frac{CL''}{AL'} = \frac{\sin\omega}{\sin(\gamma-\omega)}$.

Beide Systeme liefern die Relation:

$$\sin(\alpha-\omega)\sin(\beta-\omega)\sin(\gamma-\omega) = \sin^3\omega.$$

Verwandelt man hier $\sin(\alpha-\omega)\sin(\beta-\omega)$ in eine Summe, dann die Produkte der Glieder mit $\sin(\gamma-\omega)$ wieder in Summen, so ergiebt sich mit Berücksichtigung der Bedingung $\alpha+\beta+\gamma = 180^0$ die Gleichung:

$$\sin(2\alpha+\omega)+\sin(2\beta+\omega)+\sin(2\gamma+\omega)-\sin 3\omega = 4\sin^3\omega.$$

Hieraus folgt, wenn man noch die Relation benutzt:

$$\sin 3\omega = 3\sin\omega - 4\sin^3\omega,$$

die Gleichung:

$$(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)\cos\omega+(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma)\sin\omega = 3\sin\omega.$$

Da nun $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$,

$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma = -1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ ist,

so folgt $\cot\omega = \frac{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$.

Setzt man noch

$$1 = -\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

so folgt

$$\cot\omega = \cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma.$$

Bem. Die Zurückführung von $\cot\omega$ auf $\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma$ kann auch leicht auf folgende Weise geschehen.

Da $A(BL') = \omega$, $B(L'A) = \beta-\omega$ ist, so folgt $L'(AB) = 180^0-\beta$, also

$$AL' = \frac{c\sin(\beta-\omega)}{\sin\beta}, \text{ ferner auch}$$

$$AL' = \frac{b\sin\omega}{\sin\alpha}, \text{ also}$$

$$\sin\gamma\sin\alpha\sin(\beta-\omega) = \sin^2\beta\sin\omega \text{ oder}$$

$$\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta\cot\omega-\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta = \sin^2\beta,$$

$$\cot\omega = \cot\beta+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma} = \cot\beta+\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

$$= \cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma.$$

3. Die Brocardschen Punkte können durch folgende Konstruktion erhalten werden: Man zeichne den Kreis, der BC in B berührt und durch A geht, dann den Kreis, der CA in C berührt und durch B geht; der Schnittpunkt dieser Kreise, durch den auch der Kreis geht, der

AB in A berührt und durch C geht, ist der Brocardsche Punkt L'. Analog wird L'' gefunden, indem man den Kreis zeichnet, der BC in C berührt und durch A geht, dann den Kreis, der CA in A berührt und durch B geht, durch deren Schnittpunkt auch der Kreis geht, der AB in B berührt und durch C geht.

Der Beweis folgt sofort daraus, daß $L'(AB) = 180^0 - \beta$, $L'(BC) = 180^0 - \gamma$, $L'(CA) = 180^0 - \alpha$, $L''(AB) = 180^0 - \alpha$, $L''(BC) = 180^0 - \beta$, $L''(CA) = 180^0 - \gamma$ ist.

4. Die Brocardschen Punkte können auch durch Benutzung der Symmedianen erhalten werden. Zieht man nämlich die sich in L schneidenden Symmedianen AL_α, BL_β, CL_γ, dann durch L_α die Parallele $L_\alpha N_3$ zu AC, durch L_β die Parallele $L_\beta N_1$ zu BA, durch L_γ die Parallele $L_\gamma N_2$ zu BC, so schneiden sich AN_1, BN_2, CN_3 in L'. Man wird ähnlich L'' erhalten, wenn man durch L_α die Parallele $L_\alpha M_2$ zu AB, durch L_β die Parallele $L_\beta M_3$ zu BC, durch L_γ die Parallele $L_\gamma M_1$ zu CA zieht, und die Ecktransversalen AM_1, BM_2, CM_3 zeichnet.

Bew. Der Satz ist bewiesen, wenn man zeigen kann, daß CL' die Seite AB in einem Punkte N_3 schneidet, so daß $BL_\alpha : L_\alpha C = BN_3 : N_3A$ ist.

Durch Vergleichung der Dreiecke BN_3C, AN_3C folgt:

$BN_3 : N_3A = a \sin(\gamma - \omega) : b \sin\omega = \sin\alpha \sin(\gamma - \omega) : \sin\beta \sin\omega$;

also da $\sin(\gamma - \omega) : \sin\omega = \sin^2\gamma : \sin\alpha \sin\beta$ ist (Nr. 2) so folgt:

$$BN_3 : N_3A = \sin\alpha \sin^2\gamma : \sin\alpha \sin^2\beta = \sin^2\gamma : \sin^2\beta.$$

Bekanntlich aber ist $BL_\alpha : L_\alpha C = c^2 : b^2 = \sin^2\gamma : \sin^2\beta$.

5. $\sin\alpha \cos(\alpha + \omega) + \sin\beta \cos(\beta + \omega) + \sin\gamma \cos(\gamma + \omega) = 0.$

Bew. Setzen wir diesen Ausdruck gleich Ω, so ist

$$\Omega = (\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma)\cos\omega - (\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)\sin\omega$$
$$= 2\{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\omega - (1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\sin\omega\} = 0.$$

6. Einiges über die Größe des Brocardschen Winkels.

Es ist $(\cot\beta - \cot\gamma)^2 + (\cot\gamma - \cot\alpha)^2 + (\cot\alpha - \cot\beta)^2$

$= 2\{(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma)^2 - 3(\cot\beta\cot\gamma + \cot\gamma\cot\alpha + \cot\alpha\cot\beta)\}$

$= 2(\cot^2\omega - 3)$.

Daher ist im allgemeinen $\cot^2\omega > 3$ und nur dann $\cot\omega = 3$, wenn $\alpha = \beta = \gamma = 60^0$ ist; daher $\omega \gtrless 30^0$.

$$\text{Ist } \alpha = 90^0, \text{ so ist } \cot\omega = \cot\beta + \operatorname{tg}\beta = \frac{2}{\sin^2\beta} \gtrless 2.$$

Ist $\alpha > 90^0$, so können wir die Winkel des Dreiecks mit $90^0 + \varphi + \psi$, $45^0 - \varphi$, $45^0 - \psi$ bezeichnen, wobei aber ψ auch negativ sein kann; ist aber etwa $\psi = -\chi$, so ist immer $\varphi > \chi$.

Man findet nach einigen Umformungen:

$$\cot\omega = 2 + \operatorname{tg}(\varphi+\psi) + \frac{2\{(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi)^2 + 2\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi(1-\operatorname{tg}\varphi)(1-\operatorname{tg}\psi)\}}{(1-\operatorname{tg}\varphi)(1-\operatorname{tg}\psi)(1-\operatorname{tg}\psi\operatorname{tg}\varphi)}.$$

Da $\operatorname{tg}\varphi < 1$, $\operatorname{tg}\psi < 1$ ist, so folgt, daß

$$\cot\omega > 2 + \operatorname{tg}(\varphi+\psi) \text{ ist.}$$

Aus der Relation in Nr. 5 folgt, daß unter den Winkeln $\alpha+\omega$, $\beta+\omega$, $\gamma+\omega$ wenigstens einer größer als 90^0 und einer kleiner als 90^0 sein muß (der Grenzfall $\alpha=\beta=\gamma$ wird natürlich ausgenommen). Ist also $\alpha>\beta>\gamma$, so ist $\alpha+\omega>90^0$, $\gamma+\omega<90^0$, dagegen ist $\beta+\omega$ zweifelhaft.

Die Grundgleichung $\sin(\alpha-\omega)\sin(\beta-\omega)\sin(\gamma-\omega) = \sin^3\omega$ ergiebt ferner, daß, wenn eine Ecktransversale nach einem Brocardschen Punkte den betreffenden Winkel halbiert, dies nur die aus der Ecke des mittleren Winkels sein kann, die dann natürlich beide Brocardsche Punkte enthält.

In Bezug auf die Brocardschen Winkel erhalten wir daher 5 Hauptfälle von Dreiecken.

1. $\alpha > 90^0 > \beta > 2\omega > \gamma$, $\beta+\omega < 90^0$,
2. $\alpha > 90^0 > 2\omega > \beta > \gamma$, $\beta+\omega < 90^0$,
3. $90^0 > \alpha > \beta > 2\omega > \gamma$, $\beta+\omega > 90^0$,
4. $90^0 > \alpha > \beta > 2\omega > \gamma$, $\beta+\omega < 90^0$,
5. $90^0 > \alpha > 2\omega > \beta > \gamma$, $\beta+\omega < 90^0$.

Dazu treten noch Grenzfälle, die wir erhalten, wenn entweder 2 Winkel des Dreiecks gleich sind, oder $\beta = 2\omega$ oder endlich $\beta+\omega = 90^0$ ist.

Bemerkenswert ist, daß unter den 5 Hauptfällen nur einmal $\beta+\omega > 90^0$ sein kann.

Es ist natürlich, daß die allgemeinen Eigenschaften für alle Fälle denselben Charakter tragen; auch sind die Untersuchungen entsprechend; die Verschiedenheiten beziehen sich nur auf die Lage verschiedener Punkte. Der Klarheit halber wird es gut sein, einen bestimmten Fall zu Grunde zu legen; es sei hier der Fall $90^0 > \alpha > \beta > 2\omega > \gamma$ gewählt.

7. Schneiden sich BL′ und CL″ in A′, CL′ und AL″ in B′, AL′ und BL″ in C′, so liegen A′, B′, C′ auf einem Kreise, der durch L′ und L″ geht, und A′B′C′ ist dem Grunddreieck ABC ähnlich. Dieses Dreieck heißt das erste Brocardsche Dreieck, der Kreis der Brocardsche.

Bew. Der Mittelpunkt des Umkreises sei M (Fig. 70), also M_a, M_b, M_c die Mittelpunkte der Seiten, dann liegen nach unserer Annahme die Punkte A′ und B′ weiter von M_a und M_b entfernt, als M,

C′ liegt aber näher an M_c als M. Es ist nämlich $MM_a = r\cos\alpha$, $A'M_a = r\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\omega$, da aber $\cot\alpha < \mathrm{tg}\,\omega$ ist, so auch $\cos\alpha < \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\omega$, ebenso $\cos\beta < \sin\beta\,\mathrm{tg}\,\omega$, dagegen $\cos\gamma > \sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\omega$. Nun ist $A'(L'M) = 90^0 - \omega$, $A'(MC) = 90^0 - \omega$, also $A'(L'C) = 180^0 - 2\omega$, also, da L″ in der Verlängerung von CA′ liegt, $A'(L'L'') = 2\omega$. Ebenso $B'(L'L'') = 2\omega$, $C'(L'L'') = 180^0 - 2\omega$; es liegen also alle 3 Punkte auf einem Kreise über L′L″, wie aus der angegebenen Lage der Punkte A′, B′, C′ hervorgeht.

Es ist ferner $L'(BC) = 180^0 - \gamma$, also $L'(A'B') = \gamma$; ebenso $L'(BA) = 180^0 - \beta$, $L'(A'C') = \beta$, ꝛc.

8. Zieht man durch die Ecken des ersten Brocardschen Dreiecks die Parallelen zu den entsprechenden Seiten des Grunddreiecks, so schneiden sich dieselben im Punkte von Lemoine.

Bew. Es ist bewiesen (111), daß die Abstände des Punktes von Lemoine sich wie die Seiten verhalten, daraus folgt (111 und 2 im Anhang)

$LL_a = r\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\omega$, $LL_b = r\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\omega$, $LL_c = r\sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\omega$.

Es ist aber auch $A'M_a = r\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\omega$, $B'M_b = r\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\omega$, $C'M_c = r\sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\omega$, also $A'L \parallel BC$, $B'L \parallel CA$, $C'L \parallel AB$, woraus der Satz folgt.

9. Der Abstand des Mittelpunktes des Umkreises vom Punkt von Lemoine ist ein Durchmesser des Brocardschen Kreises um A′B′C′. (Brocardscher Durchmesser.)

Bew. Aus Nr. 8 folgt $A'(LM) = 90^0$, ebenso $B'(LM) = 90^0$, $C'(LM) = 90^0$.

Bem. Der Kreis geht also durch 7 besondere Punkte, A′, B′, C′, L′, L″, L, M, derselbe wurde daher auch der Kreis der 7 Punkte genannt.

10. Die Gerade von Brocard d. h. die Verbindungslinie der Brocardschen Punkte ist senkrecht zum Brocardschen Durchmesser, d. h. der Verbindungslinie des Punktes von Lemoine mit dem Mittelpunkt des Umkreises.

Bew. Es ist zu beweisen, daß $LM \perp L'L''$ ist. Nun ist $A'(LL') = B(A'C) = \omega$; ebenso $A'(LL'') = C(A'B) = \omega$, also die Bogen LL′ und LL″ einander gleich; da nun LM ein Durchmesser ist, so folgt $LM \perp L'L''$.

11. Das Grunddreieck ist mit dem ersten Brocardschen Dreieck kollinear; die Entfernungen des Kollineationscentrums von den Seiten sind den dritten Potenzen der Seiten umgekehrt proportional.

Bew. Der erste Teil ergiebt sich als Folgerung eines allgemeinen Satzes: Zeichnet man über den Seiten eines Dreiecks als Grundlinien ähnliche gleichschenklige Dreiecke, so ist das durch die Spitzen bestimmte Dreieck dem ursprünglichen Dreieck kollinear.

Es sei φ der Winkel an der Basis der betreffenden gleichschenkligen Dreiecke, die Spitze des Dreiecks über BC sei A_φ, über CA sei B_φ, über AB sei C_φ. Liegt A_φ auf der äußern Seite, so läßt sich für alle Punkte von AA_φ die Eigenschaft nachweisen, daß die Entfernungen des Punktes von den Seiten b und c das Verhältnis $\frac{1}{\sin(\beta+\varphi)} : \frac{1}{\sin(\gamma+\varphi)}$ haben. Ebenso haben die Punkte von BB_φ die Eigenschaft, daß die Entfernungen derselben von den Seiten c und a das Verhältnis $\frac{1}{\sin(\gamma+\varphi)} : \frac{1}{\sin(\alpha+\varphi)}$ haben, und die Punkte von CC_φ haben Entfernungen von a und b, die sich wie $\frac{1}{\sin(\alpha+\varphi)} : \frac{1}{\sin(\beta+\varphi)}$ verhalten.

Hieraus folgt, daß das Tripelverhältnis der Ecktransversalen AA_φ, BB_φ, CC_φ zu den Seiten des Dreiecks den Wert 1 hat, daß sie sich also in einem Punkte schneiden. Die Entfernungen dieses Punktes zu den Seiten haben das Verhältnis:

$$\frac{1}{\sin(\alpha+\varphi)} : \frac{1}{\sin(\beta+\varphi)} : \frac{1}{\sin(\gamma+\varphi)}.$$

Ist das Dreieck nach der innern Seite angetragen, so ist einfach $-\varphi$ an Stelle von φ zu setzen.

Man erhält nun die Punkte A', B', C', indem man gleichschenklige Dreiecke mit dem Basiswinkel ω nach der innern Seite anträgt. Daher schneiden sich AA', BB', CC' in einem Punkte S, dessen Entfernungen von den Seiten das Verhältnis

$$\frac{1}{\sin(\alpha-\omega)} : \frac{1}{\sin(\beta-\omega)} : \frac{1}{\sin(\gamma-\omega)}$$ haben.

Aus Nr. 2 folgt, da $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \sin(\beta-\omega) = \sin^3\beta \sin\omega$ ist, daß $\sin(\alpha-\omega) : \sin(\beta-\omega) : \sin(\gamma-\omega) = \sin^3\alpha : \sin^3\beta : \sin^3\gamma$ ist.

12. Das Grunddreieck ABC und das erste Brocardsche Dreieck A'B'C' haben denselben Schwerpunkt.

Bew. Es sei A_ω der Spiegelpunkt von A' in Bezug auf Seite BC, dann haben ABC und $AA'A_\omega$ dieselbe Schwerlinie AM_a, also auch denselben Schwerpunkt G, welcher AM_a nach dem Verhältnis 2 : 1 teilt. Verbindet man noch A_ω mit B' und C', so erhält man 2 Dreiecke $B'A_\omega C$ und $C'BA_\omega$, welche beide ABC ähnlich sind, weil

sie in einem Winkel und dem Verhältnis der eingeschlossenen Seiten übereinstimmen; das Verhältnis einer Seite dieser Dreiecke zur Seite des Grunddreiecks ist in beiden Fällen $\frac{1}{2\cos\omega}$. Es folgt daraus $C'A_\omega = AB'$, $B'A_\omega = AC'$, also ist $AC'A_\omega B'$ ein Parallelogramm. Da sich also AA_ω und $B'C'$ gegenseitig halbieren, so ist der Mittelpunkt von AA_ω auch der von $B'C'$. Die Dreiecke $A'B'C'$ und $AA'A_\omega$ haben also dieselbe von A' ausgehende Schwerlinie; daher haben diese Dreiecke denselben Schwerpunkt G.

13. Bestimmt man die Spiegelpunkte der Ecken des ersten Brocardschen Dreiecks in Bezug auf die Seiten des Grunddreiecks, so erhält man ein Dreieck $A_\omega B_\omega C_\omega$, das mit dem Grunddreieck kollinear ist; das Kollineationscentrum ist der Winkelgegenpunkt vom Mittelpunkt der Strecke, deren Endpunkte die Brocardschen Punkte sind.

Bew. Daß die angegebenen Dreiecke kollinear sind, folgt aus dem in Nr. 11 angegebenen allgemeinen Satze. Es sei dann E der Mittelpunkt von $L'L''$ und J der Schnittpunkt von AA_ω, BB_ω, CC_ω, K der Mittelpunkt des Brocardschen Kreises, $K_{a'}$ der Mittelpunkt von $B'C'$; dann sind $AC'B'$ und $AL'L''$ 2 ähnliche Dreiecke, da $AC'L'$ und $AL''B'$ als Sekanten des Brocardschen Kreises angesehen werden können; diese Dreiecke haben aber umgekehrte ähnliche Lage; es sind also AE und $AK_{a'}$ entsprechende Gerade in den Dreiecken und für dasselbe Dreieck Gegentransversalen. Da aber AL' und AL'' auch Gegentransversalen im Grunddreieck sind, so also auch AE und $AK_{a'}$; $AK_{a'}$ ist der Lage nach AA_ω oder AJ; also AE und AJ sind Gegentransversalen. Da ebenso BE und BJ, CE und CJ Gegentransversalen sind, so sind E und J Gegenpunkte.

Es folgt noch aus Nr. 11:

$$JJ_a : JJ_b : JJ_c = \frac{1}{\sin(\alpha+\omega)} : \frac{1}{\sin(\beta+\omega)} : \frac{1}{\sin(\gamma+\omega)},$$

also findet man:

$$EE_a : EE_b : EE_c = \sin(\alpha+\omega) : \sin(\beta+\omega) : \sin(\gamma+\omega),$$

oder $EE_a = \lambda\sin(\alpha+\omega)$, $EE_b = \lambda\sin(\beta+\omega)$, $EE_c = \lambda\sin(\gamma+\omega)$.

Da $a\cdot EE_a + b\cdot EE_b + c\cdot EE_c = 2\Delta$ ist, so findet man durch Einsetzen die Gleichung:

$$\lambda\{(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)\cos\omega + (\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\gamma)\sin\omega\} = 2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

oder da $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cot\omega$,

$\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ ist,

$$\lambda\{\cot\omega\cos\omega+\sin\omega\}=r,$$
$$\lambda=r\sin\omega;$$

somit $EE_a = r\sin\omega\sin(\alpha+\omega)$, $EE_b = r\sin\omega\sin(\beta+\omega)$, $EE_c = r\sin\omega\sin(\gamma+\omega)$.

Bem. Es ist nicht schwierig, diese Längen direkt aus den Abständen der Punkte L′ und L″ von den Seiten abzuleiten.

Man findet leicht mittelst des Sinussatzes:

$$L'L'_a=\frac{r\sin\gamma\sin^2\omega}{\sin\beta},\quad L''L_a''=\frac{r\sin\beta\sin^2\omega}{\sin\gamma},\text{ also}$$

$$\tfrac{1}{2}(L'L'_a+L''L''_a)=EE_a=\frac{r\sin^2\omega}{\sin\beta\sin\gamma}(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)=\frac{r\sin^2\omega}{\sin\beta\sin\gamma}$$
$$(\sin^2\alpha+2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha),$$

$$EE_a=\frac{r\sin^2\omega}{\sin\beta\sin\gamma}\{1-\cos\alpha(\cos\alpha-2\sin\beta\sin\gamma)\}$$
$$=\frac{r\sin^2\omega}{\sin\beta\sin\gamma}(1+\cos\alpha\cos(\beta-\gamma))=\frac{r\sin^2\omega}{\sin\beta\sin\gamma}(1+\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma)$$
$$=r\sin^2\omega\sin\alpha(\cot\omega+\cot\alpha)=r\sin\omega\sin(\alpha+\omega).$$

14. Der Schwerpunkt des Dreiecks, dessen Ecken das Kollineationscentrum des Grunddreiecks mit dem Brocardschen Dreieck und die Brocardschen Punkte sind, ist der Schwerpunkt des Grunddreiecks.

Bew. Das Kollineationscentrum sei S, dann ist also SL′L″ das betreffende Dreieck, welches mit ABC den Schwerpunkt G gemein haben soll. Wir haben für den Mittelpunkt E von L′L″ die Eigenschaft $EE_a = r\sin\omega\sin(\alpha+\omega)$, $EE_b = r\sin\omega\sin(\beta+\omega)$, $EE_c = r\sin\omega\sin(\gamma+\omega)$.

Wird nun die Lage der Geraden M_bM_c mit a_0 bezeichnet, so ist

$$EE_{a_0}=r\sin\beta\sin\gamma-r\sin\omega\sin(\alpha+\omega)$$
$$=\frac{r}{2}(\cos(\beta-\gamma)+\cos\alpha-\cos\alpha-\cos(\alpha+2\omega))$$
$$=r\sin\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}+\omega\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}+\omega\right)$$
$$=r\sin(\beta-\omega)\sin(\gamma-\omega).$$

Analog ist:

$EE_{b_0} = r\sin(\gamma-\omega)\sin(\alpha-\omega)$, $EE_{c_0} = r\sin(\alpha-\omega)\sin(\beta-\omega)$, also

$$EE_{a_0}:EE_{b_0}:EE_{c_0}=\frac{1}{\sin(\alpha-\omega)}:\frac{1}{\sin(\beta-\omega)}:\frac{1}{\sin(\gamma-\omega)},$$

so daß (Nr. 11) E für das Dreieck $M_aM_bM_c$ die Bedeutung hat, welche

das Kollineationscentrum S für ABC, daher muß SE durch den Schwerpunkt G gehen, und durch diesen Punkt nach dem Verhältnis 2 : 1 geteilt werden. Dann ist aber G der Schwerpunkt von SL'L''.

15. Der Winkelgegenpunkt T vom Kollineationscentrum S ist der Pol von L'L'' in Bezug auf den Brocardschen Kreis.

Bew. Ist H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, so ist A (A'A$_0$M$_a$H) oder A(SJGH) harmonisch. Zieht man die Gegentransversalen dieses Büschels, so erhält man ebenfalls harmonische Strahlen, d. h. A(TELM) ist harmonisch; der Durchmesser LM des Brocardschen Kreises wird also durch T und E harmonisch geteilt; da nun E der Mittelpunkt L'L'' ist, welche Gerade senkrecht zu LM ist, so ist T der Pol von L'L''.

16. Die Geraden SH und TM (oder LM) sind parallel.

Bew. Es ist $SG : GE = 2 : 1$,
$MG : GH = 2 : 1$,
daher ME ∥ SH; ME ist aber die Gerade MT oder ML.

17. Berechnungen von Abständen merkwürdiger Punkte.

a) $\overline{L'L''}^2 = 4\,r \sin^2\omega\,(1 - 4\sin^2\omega)$.

b) $ML^2 = r^2(1 - 3\,tg^2\omega)$;

c) $\dfrac{TM}{SH} = \dfrac{1}{2\cos 2\omega}$.

d) $BS_\alpha : S_\alpha C = b^2 : c^2$.

e) $\overline{AS_\alpha}^2 = \dfrac{4r^2 \sin^4\alpha \sin(\alpha + 3\omega)}{\sin(\alpha - \omega)\sin^2(\alpha + \omega)}$.

f) $AS^2 = 4\,r^2 \sin(\alpha + 3\omega)\sin(\alpha - \omega)$

g) $MS = \dfrac{r\cos 3\omega}{\cos\omega} = r(1 - 4\sin^2\omega)$.

a) $L'L''^2 = AL'^2 + AL''^2 - 2\,AL' \cdot AL''\cos(\alpha - 2\omega)$.

Nun ist $AL' = \dfrac{2r\sin\omega\sin\beta}{\sin\alpha}$, $AL'' = \dfrac{2r\sin\omega\sin\gamma}{\sin\alpha}$,

also $\overline{L'L''}^2 = \dfrac{4r^2\sin^2\omega}{\sin^2\alpha}\{\sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos(\alpha - 2\omega)\}$;

da $\cos(\alpha - 2\omega) = \cos\alpha + 2\sin\omega\sin(\alpha - \omega)$ ist, so folgt:

$$\overline{L'L''}^2 = \frac{4r^2\sin^2\omega}{\sin^2\alpha}\{\sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha - 4\sin\beta\sin\gamma\sin\omega \sin(\alpha - \omega)\}$$

$$= \frac{4\,r^2 \sin^2\omega}{\sin^2\alpha}\left\{\sin^2\alpha - 4\sin^2\alpha\,\sin^2\omega\right\} \text{ (s. Nr. 2 Anh.)}$$

$$= 4r^2 \sin^2\omega\,(1 - 4\sin^2\omega).$$

b) $L'E = \frac{L'L''}{2}$, $ME = \frac{L'L''}{2}\cot\omega$, also

$$ME = r\cos\omega\sqrt{1-4\sin^2\omega};$$

$$ML' = r\sqrt{1-4\sin^2\omega};$$

also $ML = \frac{ML'}{\cos\omega} = \frac{r}{\cos\omega}\sqrt{1-4\sin^2\omega} = r\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\omega}.$

c. T ist der Pol von L'L'', daher $KL' \perp L'T$, also

$$KL' = KT\cdot\cos 2\omega,$$

$$KT = \frac{r\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\omega}}{2\cos 2\omega},$$

also $TM = \frac{r}{2}\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\omega}\left\{\frac{1}{\cos 2\omega}+1\right\} = \frac{r\cos^2\omega}{\cos 2\omega}\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\omega}.$

$SH = 2\,ME$ (Nr. 16), also

$SH = 2r\cos\omega\sqrt{1-4\sin^2\omega} = 2r\cos^2\omega\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\omega}$, also

$$\frac{TM}{SH} = \frac{1}{2\cos 2\omega}.$$

d) Fällt man von S_α die Lote auf die Seiten AC und AB, und werden dieselben mit s_{ab} und s_{ac} bezeichnet, so ist

$$s_{ab} : s_{ac} = \frac{1}{\sin^3\beta} : \frac{1}{\sin^3\gamma},$$

$s_{ab} = S_\alpha C\sin\gamma$, $s_{ac} = BS_\alpha\cdot\sin\beta$, also

$BS_\alpha\sin\beta : S_\alpha C\sin\gamma = \frac{1}{\sin^3\gamma} : \frac{1}{\sin^3\beta}$ oder

$BS_\alpha : S_\alpha C = \sin^2\beta : \sin^2\gamma = b^2 : c^2.$

$$BS_\alpha = \frac{ab^2}{b^2+c^2},\quad S_\alpha C = \frac{ac^2}{b^2+c^2}.$$

e) Wir setzen der Kürze halber $AS_\alpha = \sigma_\alpha$, $BS_\alpha = \sigma_\beta$, $CS_\alpha = \sigma_\gamma$, $AS = s_\alpha$, $BS = s_\beta$, $CS = s_\gamma$.

Es ist dann:

$$\sigma_\alpha^2 = b^2 + \frac{a^2c^4}{(b^2+c^2)^2} - \frac{2\,abc^2}{(b^2+c^2)}\cos\gamma$$

$$= \frac{b^6 + 2\,b^3c^2(b - a\cos\gamma) + c^4(b^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma)}{(b^2+c^2)^2}$$

$$= \frac{b^6 + c^6 + 2\,b^3c^3\cos\alpha}{(b^2+c^2)^2} = \frac{4r^2}{(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)^2}\{\sin^6\beta + \sin^6\gamma + 2\sin^3\beta\sin^3\gamma\cos\alpha\}.$$

Da $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cot\omega$, und $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$, so ist:

$$\sin^2\beta + \sin^2\gamma = \sin\beta\sin\gamma(\sin\alpha\cot\omega + \cos\alpha) = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\omega}\cdot\sin(\alpha+\omega),$$

$$\text{also } \sin^6\beta + \sin^6\gamma = \frac{\sin^3\beta\sin^3\gamma}{\sin^3\omega}\sin^3(\alpha+\omega) - \frac{3\sin^3\beta\sin^3\gamma}{\sin\omega}\sin(\alpha+\omega)$$

$$= \frac{\sin^3\beta\sin^3\gamma}{\sin^3\omega}(\sin^3(\alpha+\omega) - 3\sin^2\omega\sin(\alpha+\omega)),$$

$$\text{also } \sin^6\beta + \sin^6\gamma + 2\sin^3\beta\sin^3\gamma\cos\alpha = \frac{\sin^3\beta\sin^3\gamma}{\sin^3\omega}$$

$$\cdot(\sin^3(\alpha+\omega) - 3\sin^2\omega\sin(\alpha+\omega) + 2\cos\alpha\sin^3\omega).$$

Die Klammer läßt sich noch weiter umformen. Setzen wir sie Ω, so ist

$$\Omega = \sin(\alpha+\omega)(\sin^2(\alpha+\omega) - \sin^2\omega) - 2\sin^2\omega(\sin(\alpha+\omega) - \cos\alpha\sin\omega)$$
$$= \sin(\alpha+\omega)\sin\alpha\sin(\alpha+2\omega) - 2\sin\alpha\sin^2\omega\cos\omega$$
$$= \sin\alpha\{\sin(\alpha+\omega)\sin(\alpha+2\omega) - \sin\omega\sin 2\omega\}$$
$$= \frac{\sin\alpha}{2}(\cos\omega - \cos(2\alpha+3\omega) - \cos\omega + \cos 3\omega)$$
$$= \sin\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+3\omega) = \sin^2\alpha\sin(\alpha+3\omega).$$

Somit ergiebt sich

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{4r^2\sin\beta\sin\gamma\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin(\alpha+3\omega)}{\sin\omega\cdot\sin^2(\alpha+\omega)}$$
$$= \frac{4r^2\sin^4\alpha\sin(\alpha+3\omega)}{\sin(\alpha-\omega)\sin^2(\alpha+\omega)},$$
$$\sigma_\alpha = \frac{2r\sin^2\alpha\sqrt{\sin(\alpha-\omega)\sin(\alpha+3\omega)}}{\sin(\alpha-\omega)\sin(\alpha+\omega)}.$$

f) Der Satz des Menelaus giebt, indem wir Dreieck ACS_α durch BS_β schneiden:

$$\frac{AS}{SS_\alpha} = \frac{a^2(b^2+c^2)}{b^2c^2},\ \text{also}\ \frac{AS}{AS_\alpha} = \frac{a^2(b^2+c^2)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}\ \text{oder}$$
$$\frac{AS}{AS_\alpha} = \frac{\sin^2\alpha(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)}{\sin^2\beta\sin^2\gamma + \sin^2\gamma\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\beta} =$$
$$= \frac{\sin^2\alpha(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)\sin^2\omega}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma},$$

$$\frac{AS}{AS_\alpha} = \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \sin\omega \cdot \sin(\alpha+\omega)}{\sin^2\beta \sin^2\gamma} = \frac{\sin\omega \sin(\alpha+\omega)}{\sin\beta \sin\gamma}$$
$$= \frac{\sin(\alpha+\omega)\sin(\alpha-\omega)}{\sin^2\alpha},$$

$$\text{also } s_\alpha = 2r\sqrt{\sin(\alpha-\omega)\sin(\alpha+3\omega)}, \text{ ebenso}$$
$$s_\beta = 2r\sqrt{\sin(\beta-\omega)\sin(\beta+3\omega)},$$
$$s_\gamma = 2r\sqrt{\sin(\gamma-\omega)\sin(\gamma+3\omega)}.$$

g. Es ist $2\,ABS_\alpha = c \cdot BS_\alpha \cdot \sin\beta$;
$2\,BA'S_\alpha = BA' \cdot BS_\alpha \cdot \sin\omega$, also

$$\frac{ABS_\alpha}{BA'S_\alpha} = \frac{c\sin\beta}{BA'\sin\omega}, \text{ da auch}$$

$$BA' = \frac{r\sin\alpha}{\cos\omega} \text{ und } \frac{ABS_\alpha}{BA'S_\alpha} = \frac{AS_\alpha}{A'S_\alpha} \text{ ist, so folgt}$$

$$\frac{AS_\alpha}{A'S_\alpha} = \frac{2\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}\cot\omega = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\omega}{\sin(\alpha-\omega)},$$

daraus folgt:

$$\frac{AA'}{AS_\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\omega - \sin(\alpha-\omega)}{2\sin\alpha\cos\omega} = \frac{\sin(\alpha+\omega)}{2\sin\alpha\cos\omega}, \text{ also}$$

$$AA' = \frac{r\sin\alpha}{\cos\omega}\sqrt{\frac{\sin(\alpha+3\omega)}{\sin(\alpha-\omega)}} = \frac{r\sin\alpha}{\cos\omega\sin(\alpha-\omega)} \cdot \sqrt{\sin(\alpha-\omega)\sin(\alpha+3\omega)},$$

$$\text{auch } \frac{AA'}{A'S_\alpha} = \frac{\sin(\alpha+\omega)}{\sin(\alpha-\omega)}.$$

Ferner ist

$$A'S = AS - AA' = r\sqrt{\sin(\alpha-\omega)\sin(\alpha+3\omega)}\left\{2 - \frac{\sin\alpha}{\cos\omega\sin(\alpha-\omega)}\right\}$$
$$= \frac{r\sin(\alpha-2\omega)}{\cos\omega\sin(\alpha-\omega)}\sqrt{\sin(\alpha-\omega)\sin(\alpha+3\omega)}.$$

Dann ist noch $A'M = A'M_a - MM_a = r\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\omega - r\cos\alpha$
$$= -\frac{r\cos(\alpha+\omega)}{\cos\omega}.$$

Bei unserer Annahme über die Größe der Winkel ist $\alpha+\omega > 90^0$, also $\cos(\alpha+\omega)$ negativ, daher $A'M$ positiv hier zu nehmen. Man würde ebenso $\cos(\beta+\omega)$ negativ, aber $\cos(\gamma+\omega)$ positiv haben, woraus folgt, daß die Formeln $A'M = -\frac{r\cos(\alpha+\omega)}{\cos\omega}$, $B'M = -\frac{r\cos(\beta+\omega)}{\cos\omega}$, $C'M = -\frac{r\cos(\gamma+\omega)}{\cos\omega}$ ganz allgemein richtig sind; die letzte Gleichung drückt aus, daß C' näher an M_a liegt als M.

α) $MS^2 = A'M^2 + A'S^2 - 2MA' \cdot SA' \cos(A'M, A'S)$.

Es ist $\cos(A'M, A'S) = \frac{AH_a}{AS_\alpha} = \frac{2r \sin\beta \sin\gamma \sin(\alpha+\omega)\sin(\alpha-\omega)}{2r \sin^2\alpha \sqrt{\sin(\alpha+3\omega)\sin(\alpha-\omega)}}$

$$= \frac{\sin\omega \sin(\alpha+\omega)}{\sqrt{\sin(\alpha-\omega)\sin(\alpha+3\omega)}}.$$

Dadurch geht die Gleichung α) in folgende über:

$$MS^2 = \frac{r^2}{\cos^2\omega \sin(\alpha-\omega)}\left\{\frac{\cos^2(\alpha+\omega)\sin(\alpha-\omega) + \sin^2(\alpha-2\omega)}{\sin(\alpha+3\omega)+\sin(2\alpha+2\omega)\sin(\alpha-2\omega)\sin\omega}\right\}.$$

Wir betrachten die beiden letzten Glieder der Klammer, welche den Faktor $\sin(\alpha-2\omega)$ gemein haben; sie geben

$\sin(\alpha-2\omega)\{\sin(\alpha-2\omega)\sin(\alpha+3\omega) + \sin(2\alpha+2\omega)\sin\omega\}$

$= \frac{\sin(\alpha-2\omega)}{2}\{\cos 5\omega - \cos(2\alpha+\omega) + \cos(2\alpha+\omega) - \cos(2\alpha+3\omega)\}$

$= \sin(\alpha-2\omega)\sin(\alpha-\omega)\sin(\alpha+4\omega)$; daher ist

$$MS^2 = \frac{r^2}{\cos^2\omega}\{\cos^2(\alpha+\omega) + \sin(\alpha-2\omega)\sin(\alpha+4\omega)\}$$

$$= \frac{r^2}{2\cos^2\omega}\{1 + \cos(2\alpha+2\omega) + \cos 6\omega - \cos(2\alpha+2\omega)\}$$

$$= \frac{r^2\cos^2 3\omega}{\cos^2\omega}, \text{ also}$$

$$MS = \frac{r\cos 3\omega}{\cos\omega} = r(1 - 4\sin^2\omega).$$

18. Die Abstände des Kollineationscentrums S des Grunddreiecks mit dem Brocardschen Dreieck von den Seiten des Grunddreiecks sind:

$$SS_a = \frac{2r(\sin^3\omega)}{\sin(\alpha-\omega)}, \quad SS_b = \frac{2r\sin^3\omega}{\sin(\beta-\omega)}, \quad SS_c = \frac{2r\sin^3\omega}{\sin(\gamma-\omega)}.$$

Bew. Aus Nr. 11 folgt, daß:

$$SS_a = \frac{\lambda}{\sin(\alpha-\omega)}, \quad SS_b = \frac{\lambda}{\sin(\beta-\omega)}, \quad SS_c = \frac{\lambda}{\sin(\gamma-\omega)} \text{ ist;}$$

also erhalten wir, indem wir AS, BS, CS ziehen, wodurch das ganze Dreieck in 3 Teile geteilt wird, und das Dreieck gleich der Summe dieser 3 Teile setzen:

$$\lambda r\left\{\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\omega)} + \frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\omega)} + \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\omega)}\right\} = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

$$\text{oder da (N 2) } \sin(\alpha-\omega) = \frac{\sin^3\alpha\sin\omega}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} \text{ 2c. ist,}$$

$$\lambda r\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)=2r^2\sin\omega;$$

$$(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)^2=\cot^2\omega, \text{ also}$$

$$\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma=\cot^2\omega-2,$$

$$(1+\cot^2\alpha)+(1+\cot^2\beta)+(1+\cot^2\gamma)=1+\cot^2\omega, \text{ d. h.}$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}=\frac{1}{\sin^2\omega},$$

$$\text{daher } \frac{\lambda r}{\sin^2\omega}=2r^2\sin\omega,\ \lambda=2r\sin^3\omega, \text{ also}$$

$$SS_a=\frac{2r\sin^3\omega}{\sin(\alpha-\omega)},\ SS_b=\frac{2r\sin^3\omega}{\sin(\beta-\omega)},\ SS_c=\frac{2r\sin^3\omega}{\sin(\gamma-\omega)}.$$

19. Fällt man von den Ecken des Grunddreiecks ABC auf die entsprechenden Seiten des Brocardschen Dreiecks die Lote, so schneiden sich dieselben in einem Punkte N, der zu den Ecken des Grunddreiecks dieselbe Lage hat, als der Mittelpunkt M des Umkreises vom Grunddreieck zu den Ecken des ersten Brocardschen Dreiecks. Dieser Schnittpunkt N heißt der Punkt von Tarry.

Bew. Es sei N der Schnittpunkt des Lotes von B auf A′C′ mit dem Lote von C auf A′B′. Da A′C′ und A′B′ den Winkel α bilden, so schneiden sich diese Lote ebenfalls unter dem Winkel α, und zwar muß bei unserer Annahme über die Größe der Winkel der Schnittpunkt in demselben Flächenteil als das Dreieck liegen; daher liegt N auf der Peripherie des Umkreises von ABC. Ferner ist $N(BA)=180^0-C(BA)=180^0-C'(A'B')$. Da $BN\perp A'C'$, so muß $AN\perp B'C'$ sein, also geht das Lot von A auf B′C′ durch N.

Es ist ferner $A'M\perp BC$, $CN\perp A'B'$, also $A'(B'M)=C(BN)$; daher sind die zu den Bogen BN und B′M in dem Umkreise und dem Brocardschen Kreise gehörigen Peripheriewinkel gleich. Analog ist es mit den Bogen AN und A′M; daher liegt N in Bezug auf das Dreieck ABC ähnlich M in Bezug auf das Dreieck A′B′C′.

20. Die Abstände des Punktes N von den Seiten des Grunddreiecks erfüllen die Bedingungen:

$$NN_a:NN_b:NN_c=\frac{1}{\cos(\alpha+\omega)}:\frac{1}{\cos(\beta+\omega)}:\frac{1}{\cos(\gamma+\omega)} \text{ oder}$$

genauer, es ist

$$NN_a=-\frac{2r\cos(\beta+\omega)\cos(\gamma+\omega)}{1-4\sin^2\omega}=-\frac{2r\cos\omega\cos(\beta+\omega)\cos(\gamma+\omega)}{\cos 3\omega},$$

$NN_b=$ ꝛc.

Bew. Der Durchmesser des Brocardschen Kreises ist (17)

$r\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\omega}$, also ist $B'M:BN=\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\omega}:2$,

$$B'M = -\frac{2r\cos(\beta+\omega)}{\cos\omega\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\omega}} = -\frac{2r\cos(\beta+\omega)}{\sqrt{1-4\sin^2\omega}},$$

$$NN_a = BN\cdot\sin(BN, BC) = BN\sin(\alpha+\psi),$$

wo $\psi = A(NB) = A'(MB)$ ist.

Es ist auch $A'(C'M) = \alpha+\psi$, also

$$C'M = r\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\omega}\,.\sin(\alpha+\psi), \text{ daher}$$

$$\sin(\alpha+\psi) = \frac{\cos(\gamma+\omega)}{\cos\omega\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\omega}} = \frac{\cos(\gamma+\omega)}{\sqrt{1-4\sin^2\omega}}, \text{ somit endlich}$$

$$NN_a = \frac{-2r\cos(\beta+\omega)\cos(\gamma+\omega)}{1-4\sin^2\omega} = -\frac{2r\cos\omega\cos(\beta+\omega)\cos(\gamma+\omega)}{\cos 3\omega}.$$

Ebenso natürlich $NN_b = \dfrac{-2r\cos(\gamma+\omega)\cos(\alpha+\omega)}{1-4\sin^2\omega}$,

$$NN_c = \frac{-2r\cos(\alpha+\omega)\cos(\beta+\omega)}{1-4\sin^2\omega};$$

also $NN_a : NN_b : NN_c = \dfrac{1}{\cos(\alpha+\omega)} : \dfrac{1}{\cos(\beta+\omega)} : \dfrac{1}{\cos(\gamma+\omega)}$.

Bei unserer Annahme über die Größe der Winkel des Dreiecks muß N in dem Bogen AB liegen, nämlich in demjenigen, für den das Zeichen des Kosinus der Summe von ω mit einem Dreieckswinkel abweichend von den andern ist. In unserm Falle ist $\cos(\alpha+\omega)$ und $\cos(\beta+\omega)$ negativ, $\cos(\gamma+\omega)$ positiv; im allgemeinen wird N entweder im kleinsten oder größten Bogen liegen.

21. Der Punkt von Tarry, der Mittelpunkt des Umkreises und das Kollineationscentrum des Grunddreiecks mit dem Brocardschen Dreieck liegen in einer Geraden.

Bew. Es soll bewiesen werden, daß die Punkte N, M, S in einer Geraden liegen. Hat man 3 Punkte X, Y, Z einer Geraden, so daß $XY : YZ = p : q$ ist, und sind die Lote von X, Y, Z auf eine beliebige Gerade x, y, z, so erhält man leicht folgende Relation:

$$x = \frac{(p+q)\,y - pz}{q}.$$

Wir wollen nun S mit M verbinden und diese Gerade über M hinaus bis zum Umkreise verlängern, wodurch man den Schnittpunkt $\mathfrak{N}$ erhalte, dann ist $SM : M\mathfrak{N} = \dfrac{\cos 3\omega}{\cos\omega} : 1 = \cos 3\omega : \cos\omega$. Fällt man alsdann die Lote $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_a$, MM_a, SS_a, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{N}\mathfrak{N}_a = \frac{(\cos\omega+\cos 3\omega)\,MM_a - \cos\omega\cdot SS_a}{\cos 3\omega}.$$

Es ist aber $MM_a = r\cos\alpha$, $SS_a = \frac{2r\sin^3\omega}{\sin(\alpha-\omega)}$ (Nr. 18),

also $$\mathfrak{N}\mathfrak{N}_a = \frac{2r\cos\omega\cos 2\omega\cos\alpha\sin(\alpha-\omega) - 2r\sin^3\omega\cos\omega}{\cos 3\omega\cdot\sin(\alpha-\omega)}$$

$$= \frac{2r\cos\omega}{\cos 3\omega\sin(\alpha-\omega)}\left\{\cos 2\omega\cos\alpha\sin(\alpha-\omega) - \sin^3\omega\right\}$$

$$= \frac{2r\cos\omega}{\cos 3\omega}\left\{\cos 2\omega\cos\alpha - \sin(\beta-\omega)\sin(\gamma-\omega)\right\}$$

$$= \frac{r\cos\omega}{\cos 3\omega}\left\{\begin{array}{c}\cos(\alpha-2\omega)+\cos(\alpha+2\omega)-\cos(\beta-\gamma)\\ +\cos(\beta+\gamma-2\omega)\end{array}\right\}$$

$$= \frac{r\cos\omega}{\cos 3\omega}\left\{\cos(\alpha-2\omega) - \cos(\beta-\gamma)\right\}$$

$$= \frac{-2r\cos\omega}{\cos 3\omega}\left\{\sin(90^0-\beta-\omega)\sin(90^0-\gamma-\omega)\right\}$$

$$= \frac{-2r\cos\omega\cos(\beta+\omega)\cos(\gamma+\omega)}{\cos 3\omega}.$$

Da für die Abstände des Punktes $\mathfrak{N}$ von den andern Seiten entsprechende Ausdrücke gelten, und also dieselben sind wie die des Punktes N, so ist $\mathfrak{N}$ der Punkt N.

Bem. Die Dreiecke ABC und A'B'C' sind ähnlich, auch kollinear, sie sind aber nicht ähnlich gelegen; die Verbindungslinien von Punkten dieser Dreiecke, die sich nach dem Princip der Ähnlichkeit entsprechen, werden daher nicht durch das Kollineationscentrum gehen. Obwohl sich daher K und M, d. h. die Mittelpunkte der Umkreise nach der Ähnlichkeit entsprechen, so wird doch KM nicht durch S gehen; K und M liegen also nicht kollinear, dagegen entsprechen sich N und M sowohl in Beziehung auf Ähnlichkeit als auch betreffs der Kollinearität.

Es giebt nun noch ein Punktepaar in diesen Dreiecken, das sich nach dem Princip der Ähnlichkeit entspricht und kollinear liegt, dies sind die Höhenschnittpunkte in beiden Dreiecken. Man kann den Höhenschnittpunkt H' von A'B'C' erhalten, wenn man die Strecke KG über G um das Doppelte verlängert. Verlängert man ebenso MG um das Doppelte, so erhält man den Höhenschnittpunkt H von ABC, also ist $HH' \parallel MK$; da auch $HS \parallel MK$ (Nr. 16) ist, so ist HS und HH' dieselbe Gerade der Lage nach, d. h. HH' geht durch S.

22. Der Punkt von Tarry, der Pol der Brocardschen Linie in Bezug auf den Brocardschen Kreis und der Höhenschnittpunkt des Grunddreiecks liegen in einer Geraden.

Bew. Die Punkte N, T, H ſollen in einer Geraden liegen.
Es iſt TM ∥ SH, ferner:

$$NM : NS = 1 : 1 + \frac{\cos 3\omega}{\cos \omega} = \cos \omega : 2 \cos \omega \cos 2\omega = 1 : 2 \cos 2\omega,$$

auch $TM : SH = 1 : 2 \cos 2\omega$ (Nr. 17), alſo,

da N, M, S in einer Geraden liegen, auch N, T, H.

23. Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Schnittpunkte der Seiten des Grunddreiecks mit den entſprechenden Seiten des erſten Brocardſchen Dreiecks, ſo erhält man für die dadurch beſtimmten Stücke der Seiten folgende Ausdrücke:

$$B\mathfrak{A} = \frac{2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma) \sin 2\omega} - \frac{2r \sin^2\gamma}{\sin(\beta-\gamma)} = \frac{2r \sin\alpha \sin\beta \sin(\gamma-2\omega)}{\sin(\gamma-\beta) \sin 2\omega},$$

$$\mathfrak{A}C = \frac{2r \sin^2\beta}{\sin(\beta-\gamma)} - \frac{2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma) \sin 2\omega} = \frac{2r \sin\alpha \sin\gamma \sin(\beta-2\omega)}{\sin(\beta-\gamma) \sin 2\omega},$$

$$C\mathfrak{B} = \frac{2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha) \sin 2\omega} - \frac{2r \sin^2\alpha}{\sin(\gamma-\alpha)} = \frac{2r \sin\beta \sin\gamma \sin(\alpha-2\omega)}{\sin(\alpha-\gamma) \sin 2\omega},$$

$$\mathfrak{B}A = \frac{2r \sin^2\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)} - \frac{2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha) \sin 2\omega} = \frac{2r \sin\beta \sin\alpha \sin(\gamma-2\omega)}{\sin(\gamma-\alpha) \sin 2\omega},$$

$$A\mathfrak{C} = \frac{2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin(\alpha-\beta) \sin 2\omega} - \frac{2r \sin^2\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{2r \sin\gamma \sin\alpha \sin(\beta-2\omega)}{\sin(\beta-\alpha) \sin 2\omega},$$

$$\mathfrak{C}B = \frac{2r \sin^2\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} - \frac{2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin(\alpha-\beta) \sin 2\omega} = \frac{2r \sin\gamma \sin\beta \sin(\alpha-2\omega)}{\sin(\alpha-\beta) \sin 2\omega}.$$

Bew. Fällt man von C′ und B′ die Lote $C'C_a'$ und $B'B_a'$ auf BC, ſo findet man leicht durch den Sinusſatz:

$$C'C_a' = \frac{r \sin\gamma \sin(\beta-\omega)}{\cos\omega}, \quad B'B_a' = \frac{r \sin\beta \sin(\gamma-\omega)}{\cos\omega},$$

$$BC_a' = \frac{r \sin\gamma \cos(\beta-\omega)}{\cos\omega}, \quad B_a'C = \frac{r \sin\beta \cos(\gamma-\omega)}{\cos\omega},$$

$$\text{alſo } C_a'B_a' = 2r \sin\alpha - \frac{r(\sin\gamma \cos(\beta-\omega) + \sin\beta \cos(\gamma-\omega))}{\cos\omega}$$

$$= \frac{r}{\cos\omega}\left\{\sin\alpha \cos\omega - 2 \sin\beta \sin\gamma \sin\omega\right\}.$$

Setzt man $B_a'\mathfrak{A} = x$, ſo erhält man:

$$x + C_a'B_a' : x = \sin\gamma \sin(\beta-\omega) : \sin\beta \sin(\gamma-\omega) = \sin^2\beta : \sin^2\gamma,$$

$$\text{alſo } x + C_a'B_a' : C_a'B_a' = \sin^2\beta : \sin\alpha \sin(\beta-\gamma),$$

$$x + C_a'B_a' = \frac{r \sin^2\beta}{\sin\alpha \sin(\beta-\gamma) \cos\omega}\left\{\sin\alpha \cos\omega - 2 \sin\beta \sin\beta \sin\omega\right\},$$

also

$$\mathfrak{BA} = \frac{r\sin\gamma\cos(\beta-\omega)}{\cos\omega} + \frac{r\sin^2\beta}{\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)\cos\omega}\left\{\begin{matrix}\sin\alpha\cos\omega - \\ 2\sin\beta\sin\gamma\sin\omega\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{r\sin\gamma\cos(\beta-\omega)\sin\omega}{\sin\omega\cos\omega} + \frac{r\sin\gamma\sin(\beta-\omega)}{\sin(\beta-\gamma)\sin\omega\cos\omega}\left\{\begin{matrix}\sin\alpha\cos\omega - \\ 2\sin\beta\sin\gamma\sin\omega\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{2r\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)\sin 2\omega}\left\{\begin{matrix}\sin\omega\cos(\beta-\omega)\sin(\beta-\gamma)+\sin\alpha\cos\omega \\ \sin(\beta-\omega)-\cos(\beta-\gamma)\sin\omega\sin(\beta-\omega) \\ -\cos\alpha\sin\omega\sin(\beta-\omega)\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{2r\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)\sin 2\omega}\left\{\sin\omega\sin(\beta-\gamma-\beta+\omega)+\sin(\beta-\omega)\sin(\alpha-\omega)\right\}$$

$$= \frac{2r\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)\sin 2\omega}\left\{\sin(\alpha-\omega)\sin(\beta-\omega)-\sin\omega\sin(\gamma-\omega)\right\}$$

$$= \frac{r\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)\sin 2\omega}\left\{\begin{matrix}\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta-2\omega)- \\ \cos(\gamma-2\omega)+\cos\gamma\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{r\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)\sin 2\omega}\left\{\begin{matrix}\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\gamma+2\omega) \\ -\cos(\gamma-2\omega)\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{2r\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)\sin 2\omega}\left\{\sin\alpha\sin\beta-\sin\gamma\sin 2\omega\right\}$$

$$\mathfrak{BA} = \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)\sin 2\omega} - \frac{2r\sin^2\gamma}{\sin(\beta-\gamma)}.$$

Es ist dann

$$\mathfrak{AC} = 2r\sin\alpha - \mathfrak{BA} =$$

$$= \frac{2r\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+2r\sin^2\gamma}{\sin(\beta-\gamma)} - \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)\sin 2\omega}$$

$$= \frac{2r(\sin^2\beta-\sin^2\gamma+\sin^2\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)} - \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)\sin 2\omega}$$

$$= \frac{2r\sin^2\beta}{\sin(\beta-\gamma)} - \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)\sin 2\omega}.$$

Wir führen in der Formel für $\mathfrak{BA}$ noch andere Ausdrücke ein:

$$\sin^2\gamma = \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin(\gamma-\omega)}{\sin\omega}, \text{ daher}$$

$$\mathfrak{BA} = \frac{2r\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\gamma)\sin 2\omega}\left\{\sin\gamma-2\cos\omega\sin(\gamma-\omega)\right\}$$

$$= -\frac{2r\sin\alpha\sin\beta\sin(\gamma-2\omega)}{\sin(\beta-\gamma)\sin 2\omega} = \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\sin(\gamma-2\omega)}{\sin(\gamma-\beta)\sin 2\omega}.$$

Die Umformung für $\mathfrak{AC}$ ist ebenso. Die anderen Werte ergeben sich hieraus durch cyklische Vertauschung. Man wird dabei erkennen,

daß alle Werte bei unserer Annahme über die Größe der Winkel positiv sind, außer AC, was mit der Thatsache in Übereinstimmung steht, daß C über A hinaus in der Verlängerung von AB liegt. Die vorstehenden Formeln gelten also mit Berücksichtigung der Zeichenregel.

24. Die Kollineationsachse zwischen dem Grundbreieck und dem ersten Brocardschen Dreieck ist senkrecht zur Verbindungslinie des Kollineationscentrums mit dem Punkte von Tarry.

Bew. Die Kollineationsachse ist ABC, auf jener Verbindungsgeraden liegen die Punkte N und M. Der Satz ist offenbar bewiesen, wenn die Relation besteht:

$$\overline{\mathfrak{C}M}^2 - \overline{\mathfrak{B}M}^2 = \overline{\mathfrak{C}N}^2 - \overline{\mathfrak{B}N}^2.$$

Da $CN \perp A'B'$ ist, so folgt:

$A'N^2 - A'C^2 = B'N^2 - B'C^2 = \mathfrak{C}N^2 - \mathfrak{C}C^2$, denn C liegt auf A'B',

also $\mathfrak{C}N^2 = A'N^2 - A'C^2 + \mathfrak{C}C^2$, ebenso

$\mathfrak{B}N^2 = A'N^2 - A'B^2 + \mathfrak{B}B^2$, also

$$\mathfrak{C}N^2 - \mathfrak{B}N^2 = A'B^2 - A'C^2 + \mathfrak{C}C^2 - \mathfrak{B}B^2$$
$$= \mathfrak{C}C^2 - \mathfrak{B}B^2, \text{ da } A'B = A'C \text{ ist.}$$

Es ist ferner:

$$\mathfrak{C}M^2 = \mathfrak{C}B^2 + r^2 - 2\,\mathfrak{C}B\,r\sin\gamma,$$
$$\mathfrak{B}M^2 = \mathfrak{B}C^2 + r^2 - 2\,\mathfrak{B}C\,r\sin\beta,$$
$$\mathfrak{C}M^2 - \mathfrak{B}M^2 = \mathfrak{C}B^2 - \mathfrak{B}C^2 - 2r\{\mathfrak{C}B\sin\gamma - \mathfrak{B}C\sin\beta\},$$

ferner $\mathfrak{C}C^2 = \mathfrak{C}B^2 + a^2 - 2a\,\mathfrak{C}B\cos\beta$,

$\mathfrak{B}B^2 = \mathfrak{B}C^2 + a^2 - 2a\,\mathfrak{B}C\cos\gamma$, also

$$\mathfrak{C}C^2 - \mathfrak{B}B^2 = \mathfrak{C}B^2 - \mathfrak{B}C^2 - 4r\{\mathfrak{C}B\sin\alpha\cos\beta - \mathfrak{B}C\sin\alpha\cos\gamma\},$$

$$\mathfrak{C}M^2 - \mathfrak{B}M^2 = \mathfrak{C}C^2 - \mathfrak{B}B^2 + 2r\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{C}B\,(2\sin\alpha\cos\beta - \sin\gamma) - \\ \mathfrak{B}C\,(2\sin\alpha\cos\gamma - \sin\beta)\end{array}\right\}$$

$2\sin\alpha\cos\beta - \sin\gamma = \sin(\alpha-\beta)$, $2\sin\alpha\cos\gamma - \sin\beta = \sin(\alpha-\gamma)$, also

$$\mathfrak{C}M^2 - \mathfrak{B}M^2 = \mathfrak{C}C^2 - \mathfrak{B}B^2 + 2r\{\mathfrak{C}B\sin(\alpha-\beta) - \mathfrak{B}C\sin(\alpha-\gamma)\}.$$

Nach unsern Formeln (Nr. 23) ist aber $\mathfrak{C}B\sin(\alpha-\beta) = \mathfrak{B}C\sin(\alpha-\gamma)$, daher

$$\mathfrak{C}M^2 - \mathfrak{B}M^2 = \mathfrak{C}C^2 - \mathfrak{B}B^2 = \mathfrak{C}N^2 - \mathfrak{B}N^2.$$

25. Die Potenzlinie des Umkreises und des Brocardschen Kreises ist die Linie von Lemoine, d. h. die Polare des Punktes von Lemoine in Bezug auf den Umkreis.

Bew. Die Tangente in A an den Umkreis treffe BC in L_{α}', dann ist L_{α}' der Pol der Symmediane AL, also geht das von M auf die Symmediane AL gefällte Lot durch L_{α}'. Ist A_2 der Fußpunkt

des Lotes von M auf AL und A_p der Pol von BC in Bezug auf den Umkreis, so liegen A, A_2, A_p in einer Geraden. Da $A_2(MA_p) = 1\,R$, so geht der über MA_p als Durchmesser gelegte Kreis durch A_2, derselbe geht aber auch durch B und C, da auch $B(MA_p) = C(MA_p) = 1\,R$ ist; denn weil A_p der Pol von BC ist, so sind A_pB und A_pC Tangenten an den Umkreis. Da sich nun MA_2 und BC in L_α' schneiden, so ist $L_\alpha'A_2 \,.\, L_\alpha'M = L_\alpha'B \,.\, L_\alpha'C$. Das letzte Produkt ist die Potenz von L_α' in Bezug auf den Umkreis. Da ferner $A_2(ML) = 1\,R$ ist, so liegt A_2 auf dem Brocardschen Kreise, also ist $L'_\alpha M \,.\, L_\alpha'A_2$ die Potenz von L_α' in Bezug auf den Brocardschen Kreis; daher hat L_α' für den Brocardschen Kreis und den Umkreis gleiche Potenzen. Das Analoge läßt sich für die entsprechend bestimmten Punkte L_β', L_γ' aussagen, so daß also $L_\alpha'L_\beta'L_\gamma'$ d. h. die Polare von L in Bezug auf den Umkreis die Potenzlinie der beiden angegebenen Kreise ist.

Bem. 1. Die Fußpunkte A_2, B_2, C_2 der von M auf die Symmedianen gefällten Lote sind die Ecken des zweiten Brocardschen Dreiecks.

Bem. 2. Die von L_α', L_β', L_γ' gelegten Kreise, welche den Umkreis rechtwinklig schneiden, sind die schon früher angegebenen Apollonischen Kreise, die sich in den isodynamischen Centren des Dreiecks (117) schneiden.

26. Die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken des ersten und des zweiten Brocardschen Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkt des ersten Dreiecks.

Bew. Bekantlich liegen A, L, A_2, A_p auf einer Geraden, und da $LB' \parallel AC$ ist, so ist $L(B'A_2) = A(LC)$; ferner $A(LC) = A(BG) = A'(B'G)$, auch $L(B'A_2) = A'(B'A_2)$, also $A'(B'G) = A'(B'A_2)$, d. h. A', G, A_2 liegen in einer Geraden; ebenso natürlich B', G, B_2; C', G, C_2.

27. Die Lote, welche man von den Halbierungspunkten der Seiten des ersten Brocardschen Dreiecks auf die Seiten des Grunddreiecks fällt, schneiden sich im Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises.

Bew. Ist K_a' der Mittelpunkt von B'C', so ist $A'G : GK_a' = 2:1$, ebenso verhalten sich also die Projektionen dieser Längen auf BC. Ist ferner F der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises, so haben wir auch $MG : GF = 2:1$, ebenso also verhalten sich die Projektionen dieser Längen auf BC; da nun die Projektionen von A' und M zusammenfallen, so müssen auch die von K_a' und F zusammenhalten, d. h. das Lot von K_a' auf BC geht durch F.

28. Wenn man in einem Dreieck die Schwerlinien bis zum Umkreise verlängert, dann die Spiegelpunkte zu den Schnittpunkten in Be-

zug auf die entsprechenden Seiten nimmt, dann sind diese Spiegelpunkte die Ecken eines Dreiecks, das dem zweiten Brocardschen Dreieck ähnlich und ähnlich gelegen ist.

Bew. Die Schnittpunkte der Schwerlinien mit dem Umkreise seien A_3, B_3, C_3, die Spiegelpunkte zu denselben in Bezug auf BC, CA, AB seien bez. A_4,B_4,C_4. Es möge ferner die Parallele durch A_3 zu BC den Kreis in A_5 treffen, dann ist A_5 zugleich der Schnittpunkt der Symmediane AL mit dem Kreise, also MM_a die Mittelsenkrechte von A_3A_5; es ist also $M_aA_5 = M_aA_3 = M_aA_4$, $A_3A_4A_5$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse A_4A_5 und A_5, M_a, A_4 liegen in einer Geraden, wobei M_a der Mittelpunkt von A_5A_4 ist. Betrachten wir nun Dreieck AA_4A_5, so ist hier M_a der Mittelpunkt von A_4A_5, A_2 der von AA_5, also sind AM_a und A_4A_2 Schwerlinien in diesem Dreieck, es muß also A_4A_2 die Gerade AM_a im Punkte G schneiden, und zwar muß $A_4G:GA_2 = 2:1$ sein. Ebenso ist $B_4G:GB_2 = C_4G:GC_2 = 2:1$; also $A_2B_2C_2 \sim A_4B_4C_4$.

Übrigens ist $A_3B_3C_3 \sim A_2B_2C_2$, also auch $A_3B_3C_3 \sim A_4B_4C_4$.

29. Die Symmedianen eines Dreiecks bestimmen durch die Schnittpunkte mit dem Umkreise ein Dreieck, das dem Dreieck aus den Schwerlinien des Grunddreiecks ähnlich ist. Bestimmt man ferner die Spiegelpunkte der Ecken des angegebenen Dreiecks in Bezug auf die Seiten des Grunddreiecks, so erhält man die Ecken eines Dreiecks, das ebenfalls dem aus den Schwerlinien gebildeten Dreieck ähnlich ist.

Bew. Es seien A_5, B_5, C_5 die Schnittpunkte der Symmedianen mit dem Umkreise und A_6, B_6, C_6 die Spiegelpunkte derselben bez. BC, CA, AB. Durch Benutzung des Satzes vom Peripheriewinkel folgt leicht, daß $A_5B_5C_5$ ähnlich dem aus den Schwerlinien AM_a, BM_b, CM_c gebildeten Dreieck ist; man darf nur berücksichtigen, daß die Winkel dieses Dreiecks sind $180^0 - G(BC)$ $180^0 - G(CA)$, $180^0 - G(AB)$.

Die Spiegelpunkte A_6, B_6, C_6 können nun erhalten werden, wenn man die Verlängerungen der Schwerlinien bis zum Umkreise M_aA_3, M_bB_3, M_cC_3 rückwärts auf den Schwerlinien aufträgt. Man erhält diese Punkte auch (Nr. 121), wenn man vom Höhenschnittpunkt die Lote auf die Schwerlinien fällt.

Daraus folgt dann leicht, daß die Winkel von $A_6B_6C_6$ die vorher angegebenen Winkel $180^0 - G(BC)$ ꝛc. sind.

30. Wenn man durch den Punkt von Lemoine die Parallelen zu den Seiten zieht, so erhält man auf diesen 6 Punkte, welche auf einem Kreise liegen. Derselbe heißt der erste Lemoinesche Kreis, auch der Tuckersche Kreis, auch der Kreis der dritten Potenz (Triplicate-ratio-circle).

Bew. Zur strengen Feststellung der Schnittpunkte seien einige Bemerkungen vorausgeschickt. BC, CA, AB seien als erste, zweite, dritte Seite angesehen; ziehen wir zur ersten Seite die Parallele, so erhält der Schnittpunkt mit der zweiten Seite den Buchstaben Z, mit der dritten Seite den Buchstaben Y, u. s. f. desgl.; wenn wir X, Y, Z als ersten, zweiten, dritten Buchstaben bezeichnen, so wird der Schnittpunkt mit demjenigen Buchstaben bezeichnet, welcher in der Bestimmung nicht mitwirkt; also mit X werden die Punkte bezeichnet, welche durch Parallele zur zweiten oder dritten auf der dritten oder zweiten Seite liegen. Wir geben diesen Punkten ferner den Index 1 oder 2, je nachdem die Seite, auf welcher der Punkt liegt, der Parallelen folgt oder nicht. Da CA auf BC folgt, so erhält also der Schnittpunkt der Parallelen zu BC mit CA die Bezeichnung Z_1, während der Schnittpunkt derselben Parallelen mit AB die Bezeichnung Y_2 erhält. Die Parallele zu CA schneidet also AB in X_1 und BC in Z_2, die Parallele zu AB schneidet BC in Y_1 und CA in X_2. Man ersieht, daß man die Punkte in folgender Reihenfolge erhält Y_1 und Z_2 auf BC, Z_1 und X_2 auf CA, X_1 und Y_2 auf AB.

Zunächst folgt, daß AX_1LX_2, BY_1LY_2, CZ_1LZ_2 Parallelogramme sind. Es halbiert also AL die Strecke X_1X_2 oder im Dreieck AX_1X_2 ist AL der Lage nach die Schwerlinie. Da nun die Schwerlinie in AX_1X_2 den Winkel α der Ecke A ebenso teilt, wie die Symmediane in ABC, so muß $AX_1X_2 \infty ABC$ sein, aber in entgegengesetzter Lage oder X_1X_2 ist antiparallel zu BC. Ebenso ist Y_1Y_2 antiparallel zu CA, Z_1Z_2 antiparallel zu AB, d. h.

$X_1(AX_2) = Y_2(BY_1) = \gamma$, daher $X_1X_2 = Y_1Y_2$, ebenso aber auch $X_1Y_1 = X_2Y_2$, ebenso $Y_1Z_1 = Y_2Z_2$, $Z_1X_1 = Z_2X_2$, daher die Dreiecke $X_1Y_1Z_1$ und $X_2Y_2Z_2$ kongruent.

Es ist ferner X_1X_2 antiparallel zu Z_1Y_2, also

$AX_1 \cdot AY_2 = AX_2 \cdot AZ_1$, daher liegen X_1, Y_2, X_2, Z_1 auf einem Kreise. Der durch X_2, X_1, Y_2 bestimmte Kreis muß aber auch durch Y_1 gehen, da diese 4 Punkte X_1, Y_2, Y_1, X_2 ein gleichschenkliges Trapez, also ein Kreisviereck bilden. Daß der Kreis dann auch durch den letzten Punkt Z_2 geht, ist leicht ersichtlich.

31. Im Dreieck $X_1Y_1Z_1$ ist der Punkt von Lemoine des Grunddreiecks der zweite Brocardsche Punkt, während der erste Brocardsche Punkt mit dem des Grunddreiecks übereinstimmt; im Dreieck $X_2Y_2Z_2$ ist dagegen der erste Brocardsche Punkt der Punkt von Lemoine des Grunddreiecks, während der zweite Brocardsche Punkt mit dem des Grunddreiecks übereinstimmt.

Bew. Die Dreiecke $X_1Y_1Z_1$ und $X_2Y_2Z_2$ werden durch die Parallelen zu den Seiten des Grunddreiecks durch den Punkt von Lemoine erhalten (Nr. 30). Zunächst sieht man ein, daß diese Dreiecke dem Grunddreieck ähnlich sind. Es ist nämlich $X_1(Y_1Z_1) = X_2(Y_1Z_1) = \alpha$; ähnlich folgt, daß auch die andern Winkel β und γ sind. $X_2Y_2Z_2 \cong X_1Y_1Z_1$. Setzen wir $X_1(Y_2Y_1) = \varphi$, so ist auch $Y_2(X_1X_2) = \varphi$. Da nun $X_1X_2 = Y_1Y_2 = Z_1Z_2$, so gehören zu diesen Sehnen oder Bogen im Kreise von Lemoine gleiche Peripheriewinkel, es ist also $X_1(LZ_1) = \varphi$, $Y_1(LX_1) = \varphi$, $Z_1(LY_1) = \varphi$; wir haben also im Dreieck $X_1Y_1Z_1$ 3 Ecktransversalen, welche sich in einem Punkte L schneiden, so daß sie fortlaufend mit den Seiten denselben Winkel bilden. Da $X_1Y_1Z_1$ ähnlich ABC ist, so muß dieser Winkel ω sein und zwar sieht man, daß dieser Schnittpunkt der Ecktransversalen der zweite Brocardsche Punkt ist. Wir finden ferner, daß $X_1(Y_2Y_1) = Y_1(Z_2Z_1) = Z_1(X_2X_1) = \omega$ ist, so daß die Seiten des Dreiecks $X_1Y_1Z_1$ mit den entsprechenden Seiten von ABC denselben Winkel ω bilden. Analoges gilt für $X_2Y_2Z_2$.

Es ist ferner $C'(BY_1) = B(AC') = \omega$; auch $X_1(BY_1) = \omega$; der durch BY_1C' gelegte Kreis geht also durch X_1; da auch $B(Y_1L') = C'(L'Y_1) = \omega$, so geht derselbe Kreis durch L'; also ist $X_1(Y_1L') = B(Y_1L') = \omega$, ebenso $Y_1(L'Z_1) = \omega$, so daß L' der erste Brocardsche Punkt von $X_1Y_1Z_1$ ist.

Wie das entsprechende Resultat für $X_2Y_2Z_2$ gefunden wird, bedarf keiner Erörterung.

32. Der erste Kreis von Lemoine und der Brocardsche Kreis sind konzentrisch. Der Radius des ersten Kreises ist $\frac{r}{2\cos\omega}$.

Bew. Man kann sich den Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks dadurch bestimmt denken, daß man zuerst die Brocardschen Punkte bestimmt und über der Verbindungslinie derselben als Basis ein gleichschenkliges Dreieck konstruiert, dessen Winkel an der Spitze 2ω ist. Da nun L' und L die Brocardschen Punkte vom Dreieck $X_1Y_1Z_1$ sind, so ist also der Mittelpunkt des Umkreises von $X_1Y_1Z_1$ von L' und L gleich weit entfernt. Für das Dreieck $X_2Y_2Z_2$ sind L und L'' die Brocardschen Punkte, daher ist der Mittelpunkt des Umkreises von $X_2Y_2Z_2$ von L und L'' gleich weit entfernt. Da $X_1Y_1Z_1$ und $X_2Y_2Z_2$ in demselben Kreise liegen, so ist der Mittelpunkt des durch die Ecken beider Dreiecke gehenden Kreises von L, L', L'' gleich weit entfernt; dieser Punkt ist aber der Mittelpunkt K des Brocardschen Kreises.

In Nr. 17 g Anh. haben wir die Gleichung $AA' : A'S_\alpha = \sin(\alpha+\omega) : \sin(\alpha-\omega)$, woraus folgt $AA' : AS_\alpha = \sin(\alpha+\omega) : 2\sin\alpha\cos\omega$; da nun ist

$$AA' : AS_\alpha = AL : AL_\alpha, \text{ so folgt:}$$

$$AL : AL_\alpha = \sin(\alpha+\omega) : 2\sin\alpha\cos\omega.$$

Es ist ferner $BX_1 : BA = BL : BL_\beta = \sin(\beta+\omega) : 2\sin\beta\cos\omega$,

$$X_1Y_1 : BX_1 = \sin\beta : \sin(\beta+\omega),$$

da $X_1(BY_1) = Z_1(Y_2Y_1) = \omega$ ist, also

$$X_1Y_1 : BA = 1 : 2\cos\omega.$$

Da $X_1Y_1Z_1 \sim ABC$ ist, so verhalten sich die Radien der Umkreise wie die Seiten, also ist der Radius des angegebenen Kreises $\frac{r}{2\cos\omega}$.

33. Legt man durch den Punkt von Lemoine Gerade, welche antiparallel zu den Seiten des Dreiecks, also parallel zu den Tangenten am Umkreise des Dreiecks sind, so erhält man 6 Punkte auf den Seiten, die auf einem Kreise liegen. Der Kreis wird als zweiter Kreis von Lemoine bezeichnet; der Radius desselben ist durch $r\,\mathrm{tg}\,\omega$ ausgedrückt.

Bew. (Fig. 71). Die Bezeichnung des Dreiecks ist die frühere und L der Punkt von Lemoine, die Gerade durch L, parallel der Tangente in A schneide CA in X_1, AB in X_2, die Gerade durch L parallel der Tangente in B schneide AB in Y_1, BC in Y_2, die Gerade durch L parallel der Tangente in C schneide BC in Z_1, CA in Z_2; dann soll bewiesen werden, daß X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 auf einem Kreise liegen. Da $X_1(AX_2) = \beta$, so ist $AX_1X_2 \sim ABC$, also ist AL, welche Gerade Symmediane der Lage nach in ABC ist, Schwerlinie in AX_1X_2, also $LX_1 = LX_2$. Ebenso ist $LY_1 = LY_2$, $LZ_1 = LZ_2$. Es ist ferner $X_2(LY_1) = \gamma$, auch $Y_1(LX_2) = \gamma$, also $LY_1 = LX_2$; ebenso natürlich $LZ_1 = LY_2$, $LX_1 = LZ_2$, also ist L von allen den angegebenen Punkten gleich weit entfernt; sie liegen also auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte L.

Ferner ist $AL : X_1X_2 = AM_a : BC$, wo M_a die bekannte Bedeutung hat, d. h. M_a ist der Mittelpunkt von BC.

$$AL : AL_\alpha = \sin(\alpha+\omega) : 2\sin\alpha\cos\omega.$$

Nach Nr. 112 ist $AL_\alpha = \frac{2bc \cdot AM_a}{b^2+c^2} = \frac{2\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\beta+\sin^2\gamma} \cdot AM_a$,

$$\text{also } AL = \frac{2\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\beta+\sin^2\gamma} \cdot \frac{\sin(\alpha+\omega)}{2\sin\alpha\cos\omega} AM_a.$$

Nun ist $\sin^2\beta+\sin^2\gamma = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\omega}\sin(\alpha+\omega)$ (Nr. 17 e Anh.),

$$\text{also } \frac{AL}{AM_a} = \frac{\sin\beta\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\omega)\cdot\sin\omega}{\sin\beta\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\omega)\sin\alpha\cos\omega} = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\sin\alpha},$$

$$\text{also } X_1X_2 = \frac{2r\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\omega}{\sin\alpha} = 2r\operatorname{tg}\omega, \text{ und der Radius}$$

$$LX_2 = r\operatorname{tg}\omega.$$

34. Die 6 Schnittpunkte des zweiten Lemoineschen Kreises mit den Seiten bilden, entsprechend gewählt, 2 Dreiecke, welche dem Grunddreieck ähnlich, unter sich also kongruent sind; die Seiten derselben stehen zu den Seiten des Grunddreiecks senkrecht.

Bew. Da X_1X_2 (Fig. 71) ein Durchmesser des zweiten Lemoineschen Kreises ist, so ist $Y_1X_1 \perp Y_1X_2$, d. h. $Y_1X_1 \perp AB$; ebenso $X_1Z_1 \perp AC$, $Z_1Y_1 \perp AB$. Dasselbe gilt für die Seiten des Dreiecks $X_2Y_2Z_2$, $X_2Y_2 \perp AB$ ꝛc. Daher bilden auch $Y_1Z_1Y_2Z_2$, $Z_1X_1Z_2X_2$, $X_1Y_1X_2Y_2$ 3 Rechtecke und $Y_1Z_2 \parallel BC$, $X_1Y_2 \parallel AB$, $Z_1X_2 \parallel AC$.

35. Die Stücke, welche der erste Lemoinsche Kreis von den Seiten abschneidet, verhalten sich wie die dritten Potenzen derselben.

Bew. Es ist $X_1(Y_1Z_2) = \alpha - \omega$, da X_1Z_2 durch L geht und L der zweite Brocardsche Punkt ist, daher

$$Y_1Z_2 = \frac{r\sin(\alpha-\omega)}{\cos\omega} = \frac{r\sin^3\alpha\sin\omega}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\omega} = \frac{r\sin^3\alpha\operatorname{tg}\omega}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{a^3\operatorname{tg}\omega}{4\Delta}$$

$$= \frac{a^3}{a^2+b^2+c^2},$$

ebenso natürlich

$$Z_1X_2 = \frac{r\sin^3\beta\operatorname{tg}\omega}{\sin\beta\sin\beta\sin\gamma} = \frac{b^3}{a^2+b^2+c^2}, \quad X_1Y_2 = \frac{r\sin^3\gamma\operatorname{tg}\omega}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{c^3}{a^2+b^2+c^2}.$$

Bem. Da die Abstände des Punktes T, d. h. des Poles L'L'' in Bezug auf den Brocardschen Kreis ebenfalls proportional den dritten Potenzen der Seiten sind, so hat man:

$$Y_1Z_2 : TT_a = Z_1X_2 : TT_b = X_1Y_2 : TT_c.$$

Setzt man $TT_a = \lambda\sin(\alpha-\omega)$, so hat man:

$$r\lambda(\sin\alpha\sin(\alpha-\omega) + \sin\beta\sin(\beta-\omega) + \sin\gamma\sin(\gamma-\omega)) = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Nun ist

$$\sin\alpha\sin(\alpha-\omega)+\sin\beta\sin(\beta-\omega)+\sin\gamma\sin(\gamma-\omega) = (\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)\cos\omega - (\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\gamma)\sin\omega$$

$$= 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(\cot\omega\cos\omega - \sin\omega)$$

$$= 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\frac{\cos 2\omega}{\sin\omega},$$

$$\text{also ist } \lambda = \frac{r \sin \omega}{\cos 2\omega}, \text{ also } TT_a = \frac{r \sin \omega \sin(\alpha - \omega)}{\cos 2\omega},$$

$$\frac{Y_1 Z_2}{TT_a} = \frac{\cos 2\omega}{\sin \omega \cos \omega} = 2 \cot 2\omega.$$

36. Legt man durch den ersten Brocardschen Punkt und je 2 Ecken des Grunddreiecks Kreise, so erhält man durch die Mittelpunkte derselben ein Dreieck, das dem Grunddreieck ähnlich ist; in demselben ist ferner der erste Brocardsche Punkt gemeinschaftlich mit dem Grunddreieck, während der zweite Brocardsche Punkt dieses Dreiecks der Mittelpunkt des Umkreises vom Grunddreieck ist. Ein entsprechender Satz gilt, wenn man die Umkreise durch den zweiten Brocardschen Punkt legt; in diesem Dreieck ist der Mittelpunkt des Umkreises vom Grunddreieck der erste Brocardsche Punkt.

Bew. Fig. 70. Der Mittelpunkt des Umkreises von $BL'C$ sei Z_3, der von $CL'A$ sei X_3, der von $AL'B$ sei Y_3; es ist dann $Z_3Y_3 \perp BL'$, $Z_3X_3 \perp CL'$, also bilden Z_3L' und die Mittelpunkte von BL' und CL' ein Kreisviereck, daher $Z_3(X_3Y_3) = 180^0 - L'(BC) = \gamma$; daß die andern Winkel von $X_3Y_3Z_3$ ebenso mit den Winkeln des Grunddreiecks übereinstimmen, ist daraus zu ersehen.

Da $L'(AB) = 180^0 - \beta$ ist, so berührt der Kreis durch $BL'A$, dessen Mittelpunkt Y_3 ist, die Gerade BC in B, daher ist $Y_3B \perp BC$; da ferner $Y_1B = Y_1L'$, denn da nach Nr. 31 Anh. $L'(BY_1) = \omega$ ist, ebenso $B(L'Y_1) = \omega$, so ist $Y_1B = Y_1L_1$; es geht daher Y_3Z_3 durch Y_1. Es folgt also $Y_3B = Y_3L'$, und $Y_3L' \perp Y_1L'$, daher $Y_3(Y_1L') = L'(BY_1) = \omega$. Ebenso läßt sich zeigen, daß $X_3(Y_3L') = \omega$ ist. Y_3X_3 geht durch X_1, da diese 3 Punkte von A und L' gleich weit entfernt sind ꝛc. Daher ist L' der erste Punkt von Brocard in $X_3Y_3Z_3$. Ferner $BL' \perp Y_3Z_3$; da aber $BL' \parallel Y_1Z_1$, so ist $Z_3Y_1 \perp Y_1Z_1$; $Z_3M \perp Y_1C$, daher $Z_3(MY_1) = Y_1(CZ_1) = \omega$; Z_3M bildet mit Z_3Y_3 den Winkel ω, ebenso X_3M mit X_3Z_3, daher M der zweite Brocardsche Punkt. — Daß es nicht nötig ist, die entsprechende Eigenschaft für das Dreieck $X_4Y_4Z_4$, dessen Seiten durch X_2, Y_2, Z_2 gehen, zu beweisen, ist klar.

37. Die in Nr. 36 angegebenen Dreiecke, deren Ecken die Mittelpunkte von Kreisen durch je 2 Ecken des Grunddreiecks und einen Brocardschen Punkt sind, sind einander kongruent, und die Seiten dieses Dreiecks stehen senkrecht zu den Seiten der entsprechenden Dreiecke, welche dem ersten Kreise von Lemoine einbeschrieben sind.

Bew. Es ist zu beweisen (Fig. 70) $X_3Y_3Z_3 \cong X_4Y_4Z_4$, die Seiten von $X_3Y_3Z_3$ sind senkrecht zu den Seiten von $X_1Y_1Z_1$, die Seiten von $X_4Y_4Z_4$ sind senkrecht zu den Seiten von $X_2Y_2Z_2$. Daß

$Y_1Z_1 \perp Y_3Z_3$, ist in Nr. 36 angegeben, daher der zweite Teil bewiesen. Um ein Dreieck kann man nun 2 Dreiecke zeichnen, deren Seiten senkrecht zu den Seiten des ersten sind, dieselben sind kongruent, was leicht aus Nr. 34 Anh. folgt. Da nun die Seiten von $X_4Y_4Z_4$ senkrecht zu den Seiten von $X_2Y_2Z_2$ sind, und $X_1Y_1Z_1 \cong X_2Y_2Z_2$ ist, so folgt auch das erste.

38. Die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten der in den ersten Kreis von Lemoine beschriebenen Dreiecke ($X_1Y_1Z_1$ und $X_2Y_2Z_2$) bilden ein neues Dreieck ($A_7B_7C_7$), welches dem Grunddreieck ähnlich und ähnlich gelegen ist mit dem Ähnlichkeitspunkte J.

Bew. Es schneiden sich Y_1Z_1 und Y_2Z_2 in A_7, Z_1X_1 und Z_2X_2 in B_7, X_1Y_1 und X_2Y_2 in C_7, dann soll $A_7B_7C_7 \sim ABC$ sein. Es mögen sich noch schneiden X_1Z_1 und X_2Y_2 in A_8, Y_1X_1 und Y_2Z_2 in B_8, Z_1Y_1 und Z_2X_2 in C_8; dann ist $X_1C_7A_8 \sim X_2B_7A_8$, da diese Dreiecke in 2 Winkeln übereinstimmen; daher $X_1C_7 : A_8C_7 = X_2B_7 : A_8B_7$. Es ist dann $X_1C_7 = Y_2C_7$, $X_2B_7 = Z_1B_7$, weil die Dreiecke $X_1Y_2C_7$ und $X_2Z_1B_7$ gleichschenklig sind mit dem Winkel ω an der Grundlinie, daher ist auch $A_8C_7 : C_7Y_2 = A_8B_7 : B_7Z_1$, also $C_7B_7 \parallel Y_2Z_1$; aber $Y_2Z_1 \parallel BC$, also $C_7B_7 \parallel BC$, ebenso $A_7C_7 \parallel CA$, $B_7A_7 \parallel AB$. Die Dreiecke $A_7B_7C_7$ sind daher ähnlich und ähnlich gelegen.

Es ist ferner $Y_1Z_1 \parallel A_\omega C$ (A_ω der Spiegelpunkt von A' in Bezug auf BC), ebenso $A_\omega B \parallel Y_2Z_2$; die Dreiecke $Y_2Z_1A_7$ und BCA_ω sind also ähnlich und ähnlich gelegen, sie sind beide gleichschenklig mit demselben Winkel ω an der Grundlinie, daher muß $A_\omega A_7$ durch A gehen, aber AA_ω geht auch durch J; wie nun AA_7 durch J geht, so auch BB_7, CC_7.

39. Der Mittelpunkt des Brocardschen Kreises ist der Höhenschnittpunkt des in (Nr. 38) angegebenen Dreiecks.

Bew. Da der Mittelpunkt K des Brocardschen Kreises auch der des ersten Lemoineschen Kreises ist, der durch Y_1Z_2 geht, so geht das von K auf BC gefällte Lot durch den Mittelpunkt von Y_1Z_2. Da aber A_7 von Y_1 und X_2 gleich weit entfernt ist, so geht dies Lot auch durch A_7; das von A_7 auf BC gefällte Lot geht also durch K oder also, da $B_7C_7 \parallel BC$ ist, das von A_7 auf B_7C_7 gefällte Lot geht durch K; ebenso natürlich die andern Höhen des Dreiecks $A_7B_7C_7$.

40. Die Verbindungslinien der Ecken des Grunddreiecks mit den in Nr. 38 Anh. angegebenen Punkten A_8, B_8, C_8 schneiden sich im Punkte T.

Bew. Da $X_1(AA_8) = X_2(AA_8)$, so verhalten sich die Entfernungen des Punktes A_8 von AC und AB wie die Entfernungen von X_2 und X_1

selbst. Sind 8_b und 8_c diese Abstände, so ist also $8_b : 8_c = A_8X_2 : A_8X_1$. Nun ist aber $A_8X_2 : A_8X_1 = X_2B_7 : X_1C_7 = X_2Z_1 : X_1Y_2 = b^3 : c^3$. Es verhalten sich also die Abstände des Punktes A_8 von den Seiten b und c ebenso wie die Abstände des Punktes T von diesen Seiten, daher liegen A, A_8, T in einer Geraden.

41. Die Verbindungslinien der in (Nr. 38) angegebenen entsprechenden Punkte, A_7A_8, B_7B_8, C_7C_8 schneiden sich im Punkte von Lemoine.

Bew. Es ist $X_2Y_2Z_2X_1Z_1Y_1$ ein Sechseck im Kreise; daher liegen die Schnittpunkte $X_2Y_2 - X_1Z_1$, $Y_2Z_2 - Z_1Y_1$, $Z_2X_1 - Y_1X_2$ d. h. A_8, A_7, L in einer Geraden oder A_7A_8 geht durch L. Daß natürlich auch dann B_7B_8, C_7C_8 durch L gehen, ist selbstverständlich. Zum Beweise z. B., daß B_7, B_8, L in einer Geraden liegen, betrachtet man das Sechseck $Y_2Z_2X_2Y_1X_1Z_1$.

42. Schneidet AT die Gerade X_1X_2 in X_5, BT die Gerade Y_1Y_2 in Y_5, CT die Gerade Z_1Z_2 in Z_5 und sind K_a, K_b, K_c die Fußpunkte von K auf die Seiten des Grunddreiecks, so schneiden sich X_5K_a, Y_5K_b, Z_5K_c in L.

Bew. Dreieck $AX_2X_1 \sim ABC$, aber umgekehrt liegend; daher teilt AT die Seite X_2X_1 in AX_2X_1 in demselben Verhältnisse, als AS die Seite BC; d. h. $X_1X_5 : X_5X_2 = c^2 : b^2$. Dreieck $LX_1X_2 \cong AX_2X_1$; da also LX_5 die Seite X_1X_2 nach dem Verhältnis der Quadrate der anstoßenden Seiten teilt, so ist LX_5 Symmediane in LXX_2. Dreieck $LY_1Z_2 \sim LX_1X_2$ aber umgekehrt liegend, daher ist die Gerade L_5L in der Verlängerung die Schwerlinie im Dreieck LY_1Z_2, d. h. die Gerade geht durch den Mittelpunkt von Y_1Z_2, dies ist K_a.

43. Die Spiegelpunkte der Schnittpunkte der Symmedianen mit dem Kreise in Bezug auf die entsprechenden Seiten und die Fußpunkte der Lote vom Mittelpunkte des Umkreises auf die Symmedianen sind Winkelgegenpunkte.

Bew. Es soll bewiesen werden, daß die Punkte A_2 und A_6, B_2 und B_6, C_2 und C_6 Winkelgegenpunkte sind. Zunächst liegen A_2 und A_6 auf Symmediane und Schwerlinien, also auf Gegentransversalen. Ist also noch $A_2(BC) + A_6(BC) = 180^0 + \alpha$, so ist der Satz bewiesen. Da aber $A_2(MA) = 90^0$ und also AA_2 durch den Pol von BC in Bezug auf den Umkreis geht, so liegen dieser Pol A_∞, B, A_2, C auf einem Kreise, daher $A_2(BC) = 2\alpha$; aber $A_6(BC) = A_5(BC) = 180^0 - \alpha$, also in der That $A_2(BC) + A_6(BC) = 180^0 + \alpha$.

44. Die Schnittpunkte der Verbindungslinien der Ecken derjenigen Dreiecke, welche in den ersten Kreis von Lemoine einbeschrieben sind,

bilden ein Dreieck, das zum Grunddreieck kollinear ist, wobei der Punkt von Lemoine das Kollineationscentrum ist.

Bew. Y_1Y_2 und Z_1Z_2 mögen sich in U, Z_1Z_2 und X_1X_2 in V, X_1X_2 und Y_1Y_2 in W schneiden, dann soll also UVW zu ABC kollinear und L das Kollineationscentrum sein. $Y_2Z_1Z_2Y_1$ ist ein gleichschenkliges Trapez, daher $UY_2 = UZ_1$; es ist ferner $Y_2(BU) = \gamma$, $Z_1(CU) = \beta$, also $UU_c : UU_b = \sin\gamma : \sin\beta$, also liegt U auf der Symmediane von der Ecke A; oder AU geht durch L; ebenso natürlich BV und CW.

45. Die Kollineationsachse des Grunddreiecks mit dem in Nr. 44 angegebenen Dreieck ist die Polare des Punktes von Lemoine in Bezug auf den ersten Kreis von Lemoine.

Bew. VW oder X_1X_2 und BC mögen sich in $\mathfrak{A}_1$ schneiden, dann ist also $\mathfrak{A}_1$ ein Punkt der Kollineationsachse der angegebenen Dreiecke; $\mathfrak{A}_1X_1X_2$ und $\mathfrak{A}_1Y_1Z_2$ sind 2 Sekanten, also liegt der Schnittpunkt $X_2Y_1 - X_1Z_2$ d. h. L auf der Polare von $\mathfrak{A}_1$ in Bezug auf den ersten Kreis von Lemoine, umgekehrt $\mathfrak{A}_1$ liegt auf der Polare von L; das Entsprechende gilt natürlich von den analog bestimmten Punkten $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$.

46. Sind A″ B″, C″ die Winkelgegenpunkte der Ecken A′, B′, C′ des ersten Brocardschen Dreiecks, so ist das Dreieck A″B″C″ kollinear zum Grunddreieck und zum ersten Brocardschen Dreieck.

Bew. A″ ist der Schnittpunkt von BL″ und CL′, B″ der von CL″ mit AL′, C″ der von AL″ mit BL′. Es werde nun BC von AL′ in N_1, vor AL″ in N_2 geschnitten. Es ist dann ($\overline{\wedge}$ habe die Bedeutung projektivisch gleich).

$$B(AA'SS_\alpha) \overline{\wedge} (AC''B'N_2),$$
$$C(AA'SS_\alpha) \overline{\wedge} (AB''C'N_1), \text{ also}$$
$$\text{da } B(AA'SS_\alpha) \overline{\wedge} C(AA'SS_\alpha) \text{ ist, auch}$$
$$(AC''B'N_2) \overline{\wedge} (AB''C'N_1).$$

Da diese Punktreihen den Punkt A gemeinschaftlich haben und B′C′ und N_2N_1 sich in $\mathfrak{A}$ schneiden, so geht auch B″C″ durch $\mathfrak{A}$, ebenso geht C″A″ durch $\mathfrak{B}$, A″B″ durch $\mathfrak{C}$, so daß A″B″C″ mit ABC dieselbe Kollineationsachse hat, als A′B′C′ mit ABC.

Das Kollineationscentrum der beiden Dreiecke ist offenbar T; denn da A″ der Winkelgegenpunkt von A′ ist, so muß A″ auf der Winkelgegentransversale von AA′ oder AS liegen, d. h. auf AT, also AA″ geht durch T. Ebenso geht natürlich BB″ nnd CC″ durch T. Es schneiden sich also B″C″ und B′C′ in $\mathfrak{A}$, da $\mathfrak{A}$ auf B′C′ liegt. Daher sind auch die Dreiecke A″B″C″ und A′B′C′ kollinear und zwar haben diese Dreiecke dieselbe Kollineationsachse $\mathfrak{ABC}$.

47. Das Kollineationscentrum der Dreiecke A'B'C' und A''B''C'' liegt auf der Verbindungslinie des Kollineationscentrums vom Grunddreieck mit dem ersten Brocardschen Dreieck und dessen Winkelgegenpunkt, auch auf der Eulerschen Geraden.

Bew. Das erste folgt sofort aus dem Satze: Hat man 3 Dreiecke, welche kollinear sind, wobei je 2 dieselbe Kollineationsachse haben, so liegen die Kollineationscentra in einer Geraden. Um das andere zu beweisen, wollen wir den Punkt auf ST genauer bestimmen. Wir bezeichnen ihn mit P und lassen das Dreieck AST durch A'A'' schneiden; der Schnittpunkt mit ST sei P, dann ist

$$\frac{AA'' \cdot TP \cdot SA'}{TA'' \cdot PS \cdot A'A} = 1, \text{ also } \frac{TP}{PS} = \frac{A'A \cdot TA''}{SA' \cdot AA'''}$$

$$\text{es ist } \frac{AA'}{SA'} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - 2\omega)} \quad \text{Nr. 17 Anh.}$$

$$\frac{A''T}{A''A} = \frac{AA'' - AT}{A''A} = \frac{A''A_c'' - TT_c}{A''A_c''}.$$

$$BA'' = \frac{a\sin(\gamma - \omega)}{\sin(\alpha + 2\omega)} \text{ (aus Dreieck A''BC)},$$

$$\text{also } A''A_c'' = \frac{2r\sin\alpha\sin(\gamma - \omega)\sin\omega}{\sin(\alpha + 2\omega)},$$

$$TT_c = \frac{r\sin\omega\sin(\gamma - \omega)}{\cos 2\omega} \text{ (Nr. 35 Anh.), also}$$

$$\frac{A''T}{A''A} = \frac{\dfrac{2r\sin\alpha\sin(\gamma - \omega)\sin\omega}{\sin(\alpha + 2\omega)} - \dfrac{\sin\omega\sin(\gamma - \omega)}{\cos 2\omega}}{\dfrac{2\sin\alpha\sin(\gamma - \omega)\sin\omega}{\sin(\alpha + 2\omega)}}$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cos 2\omega - \sin(\alpha + 2\omega)}{2\sin\alpha\cos 2\omega} = \frac{\sin(\alpha - 2\omega)}{2\sin\alpha\cos 2\omega},$$

$$\text{also } \frac{TP}{PS} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - 2\omega)} \cdot \frac{\sin(\alpha - 2\omega)}{2\sin\alpha\cos 2\omega} = \frac{1}{2\cos 2\omega}.$$

Da dies Verhältnis unabhänging von α ist, so gehen B'B'', C'C'' durch denselben Punkt.

Es ist ferner SHTM ein Trapez, wobei SM und HT sich in N schneiden; dann muß TS von MH in dem Verhältnis TM : HS = NM : NS = 1 : 2cos 2ω geschnitten werden, d. h. TS wird von MH in demselben Punkte P geschnitten.

48. Zeichnet man über den Seiten eines Dreiecks ähnliche gleichschenklige Dreiecke, so sind die Spitzen die Ecken eines Dreiecks, das mit dem Grunddreieck denselben Schwerpunkt hat.

Bew. (Fig. 72). Es sei ABC das Grunddreieck, XYZ das Dreieck, dessen Ecken die Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke über den Seiten sind. Wir wollen dabei die Anschauung zu Grunde legen, daß die gleichschenkligen Dreiecke mit dem Grunddreieck in demselben Flächenteile liegen. Es hat keine Schwierigkeit, den andern Fall entsprechend zu behandeln. Wir nehmen die Spiegelpunkte X', Y', Z' der Punkte X, Y, Z in Bezug auf BC, CA, AB zu Hilfe. Ist A_0 der Mittelpunkt von BC, so ist AA_0 im Grunddreieck ABC und im Dreieck AXX' Schwerlinie, daher haben beide Dreiecke auch denselben Schwerpunkt. Offenbar ist nun $ZBX' \sim ABC$; das Ähnlichkeitsverhältnis ist $1:2\cos\varphi$, wenn φ der Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke BCX ꝛc. ist; daher ist $ZX' = AY$. Ebenso ist $YX'C \sim ABC$, daher $YX' = AZ$, folglich AZX'Y ein Parallelogramm; daher ist der Mittelpunkt X_0 von YZ auch der von AX'. AXX' hat den Schwerpunkt G von ABC auch als Schwerpunkt. Verbindet man daher X mit dem Mittelpunkt X_0 von AX', so ist diese Gerade Schwerlinie in AXX' und in XYZ; diese Dreiecke haben also denselben Schwerpunkt G.

49. Der Inhalt des Dreiecks, dessen Ecken die Spitzen gleichschenkliger Dreiecke über den Seiten mit dem Basiswinkel φ sind, ist durch den Ausdruck gegeben:

$$\triangle\varphi = \frac{\triangle(2\sin\omega - \sin(2\varphi+\omega))}{4\cos^2\varphi\sin\omega},$$

wo ω der Brocardsche Winkel des Grunddreiecks $\triangle$ ist.

Bew. Um diese Formel als allgemein gültig festzustellen, müssen wir auch Dreiecke mit negativem Inhalt zulassen. Ein negativer Inhalt entsteht, wenn das erhaltene Dreieck gegenwendig zum ersten liegt, d. h. wenn die Drehung XYZ in entgegengesetzter Richtung als ABC stattfindet, wobei XYZ das Dreieck darstellt, dessen Inhalt bestimmt werden soll. Es soll dabei die Antragung des Winkels φ als positiv eingesehen werden, wenn die Spitzen X, Y, Z in den Flächenteil des Dreiecks zu liegen kommen.

Wir erhalten nun den Inhalt des Dreiecks XYZ (Fig. 72), wenn wir von Dreieck ABC mit dem Inhalt $\triangle$ abziehen BCX, CAY, ABZ, dann auch AYZ, BZX, CXY. Wir erhalten:

$$\triangle\varphi = \triangle - \frac{a^2\operatorname{tg}\varphi}{4} - \frac{b^2\operatorname{tg}\varphi}{4} - \frac{c^2\operatorname{tg}\varphi}{4} - \frac{bc\sin(\alpha-2\varphi)}{8\cos^2\varphi} - \frac{ca\sin(\beta-2\varphi)}{8\cos^2\varphi} - \frac{ab\sin(\gamma-2\varphi)}{8\cos^2\varphi},$$

oder

$$\Delta_\varphi = \Delta - \frac{a^2+b^2+c^2}{4}\operatorname{tg}\varphi - \frac{bc\sin\alpha\cos 2\varphi}{8\cos^2\varphi} - \frac{ca\sin\beta\cos 2\varphi}{8\cos^2\varphi}$$
$$- \frac{ab\sin\gamma\cos 2\varphi}{8\cos^2\varphi} + \frac{(bc\cos\alpha + ca\cos\beta + ab\cos\gamma)\sin 2\varphi}{8\cos 2\varphi}.$$

Nun ist $a^2+b^2+c^2 = 4\Delta\cot\omega$, $bc\sin\alpha = ca\sin\alpha = ab\sin\gamma = 2\Delta$, also ist

$$\Delta_\varphi = \Delta\left\{1 - \cot\omega\operatorname{tg}\varphi - \frac{3\cos 2\varphi}{4\cos^2\varphi} + \frac{\sin 2\varphi\cdot(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)}{4\cos^2\varphi}\right\}$$
$$= \frac{\Delta}{4\cos^2\varphi}\left\{4\cos^2\varphi - 2\sin 2\varphi\cot\omega - 3\cos 2\varphi + \sin 2\varphi\cot\omega\right\}$$
$$= \frac{\Delta}{4\cos^2\varphi}\left\{2 - \cos 2\varphi - \sin 2\varphi\cot\omega\right\}$$
$$= \frac{\Delta}{4\cos^2\varphi\sin\omega}\left\{2\sin\omega - \sin(2\varphi+\omega)\right\}.$$

50. Konstruiert man über den Seiten eines Dreiecks gleichschenklige Dreiecke (innerhalb), deren Basiswinkel φ die Bedingungsgleichung erfüllen $\sin(2\varphi+\omega) = 2\sin\omega$, so liegen die Spitzen in einer Geraden.

Bew. Der Beweis ergiebt sich sofort aus Nr. 49 Anh.; denn in diesem Falle verschwindet der Inhalt des Dreiecks, das die Spitzen bestimmen, was bedeutet, daß die 3 Punkte in einer Geraden liegen. Man ersieht dabei, daß es 2 solcher Geraden giebt. Sind φ_1 und φ_2 die Winkel, so ist offenbar $2\varphi_1 + \omega + 2\varphi_2 + \omega = 180^0$, also $\varphi_1 + \varphi_2 + \omega = 90^0$.

Bem. An die Formel Nr. 49 Anh. knüpfen sich noch andre Fragen, z. B. die nach dem kleinsten oder größten Dreieck. Siehe zu dem Ende: Fuhrmann, Programm des Realgymnasiums auf der Burg Königsberg i. Pr. 1889. Der Brocardsche Winkel.

51. Die Geraden, welche die Spitzen von ähnlichen gleichschenkligen Dreiecken enthalten, welche über den Seiten des Grunddreiecks errichtet sind, gehen durch den Schwerpunkt und stehen aufeinander senkrecht.

Bew. Daß sie durch den Schwerpunkt gehen, folgt aus Nr. 48 Anh. Gehen wir zur weiteren Untersuchung nochmals von den willkürlichen gleichschenkligen Dreiecken mit dem Basiswinkel φ aus; man ziehe dann XL, wo L den Punkt von Lemoine bedeutet, welche Gerade BC in $X\lambda$ schneide; das Lot in $A\lambda$ auf BC schneide ferner den Durchmesser LM des Brocardschen Kreises in Q. Ist noch A_0 der Mittelpunkt von BC, gilt aber die früher angegebene Bezeichnung (Fig. 72), dann ist

$$XA_0 : A'A_0 = XA_0 : LL_a = X\lambda A_0 : X\lambda L_a = QM : QL.$$

Nun sind XA_0 und $A'A_0$ nur von den Winkeln φ und ω abhängig, nämlich $XA_0 : A'A_0 = \operatorname{tg}\varphi : \operatorname{tg}\omega$, also werden die Lote, welche in den Schnittpunkten von YL mit CA auf CA, von ZL mit AB auf AB errichtet werden, den Durchmesser ML in demselben Punkte Q treffen. Dieser Punkt Q ist also nur vom Winkel φ abhängig.

YL schneide CA in $Y\lambda$, ZL die Seite AB in $Z\lambda$; es ist

$$XL : LX\lambda = ML : LQ = YL : LY\lambda = ZL : LZ\lambda, \text{ daher}$$

$XYZ \sim X\lambda Y\lambda Z\lambda$ und ähnlich gelegen mit L als Ähnlichkeitspunkt.

Denken wir uns nun, daß Q in einen der Punkte fällt, in welchem die Gerade LM den Umkreis schneidet, dann liegen die zugehörigen Punkte $X\lambda Y\lambda Z\lambda$, welches die Fußpunkte der Lote auf die Seiten sind, in einer Geraden, nämlich in der Geraden, welche als die Simsonsche Gerade des betreffenden Punktes auf dem Umkreise bezeichnet wird. Umgekehrt müssen also die zugehörigen Punkte X, Y, Z in einer Geraden liegen. Jene Geraden, welche die Spitzen vom ähnlichen gleichschenkligen Dreiecken über den Seiten enthalten, entsprechen also den Simsonschen Geraden der Kreispunkte, in welchen der Durchmesser LM des Brocardschen Kreises den Umkreis schneidet.

Da jene Geraden den Simsonschen Geraden parallel sind, und die beiden Simsonschen Geraden, welche den Endpunkten des Durchmessers, der ML enthält, entsprechen, zu einer senkrecht sind, so stehen auch die angegebenen Geraden zu einander senkrecht.

52. Ein Dreieck, dessen Seiten den Schwerlinien des Grunddreiecks proportional sind, ist symbrocardal zu diesem Dreieck, d. h. es hat denselben Brocardschen Winkel wie dieses Dreieck, und die Summe der Kotangenten von 2 entsprechenden Winkeln dieser beiden Dreiecke beträgt zwei Drittel der Kotangente des Brocardschen Winkels.

Bew. Die Seiten und Winkel des Grunddreiecks seien wie gewöhnlich bezeichnet, die Schwerlinien desselben mit a_0, b_0, c_0, die Winkel des aus denselben als Seiten gebildeten Dreiecks mit $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$; dann ergeben sich folgende Gleichungen:

$$a^2 = \tfrac{4}{9}(b_0^2 + c_0^2 + 2\, b_0 c_0 \cos\alpha_0),$$
$$4\, b_0 c_0 \sin\alpha_0 = 3\, bc \sin\alpha = 6\,\Delta,$$
$$4\, b_0^2 + 4\, c_0^2 = 4\, a^2 + b^2 + c^2.$$

Aus denselben folgt durch Einsetzen:

1) $6\, a^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 12\,\Delta \cot\alpha_0 = 4\,\Delta \cot\omega + 12\,\Delta \cot\alpha_0.$

Leicht ergiebt sich auch:

2) $6\, a^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 12\,\Delta \cot\alpha = 12\,\Delta \cot\omega - 12\,\Delta \cot\alpha.$

Aus diesen Gleichungen folgt dann:

3) $$3(\cot\alpha + \cot\alpha_0) = 2\cot\omega.$$

Ebenso ist also:

$$3(\cot\beta + \cot\beta_0) = 2\cot\omega,$$
$$3(\cot\gamma + \cot\gamma_0) = 2\cot\omega.$$

Durch Addition dieser Gleichungen und Division durch 3 folgt:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma + \cot\alpha_0 + \cot\beta_0 + \cot\gamma_0 = 2\cot\omega.$$

Berücksichtigt man, daß $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\omega$ ist, so folgt auch

$$\cot\alpha_0 + \cot\beta_0 + \cot\gamma_0 = \cot\omega.$$

53. Teilt man die Seiten eines Dreiecks fortlaufend nach demselben Verhältnis und verbindet die erhaltenen Teilpunkte A_1, B_1, C_1 mit den Gegenecken der Seiten, auf denen sie liegen, so entsteht durch diese Linien ein zum Grunddreieck symbrocardales Dreieck. Ebenso ist das durch die Verbindungslinien der Teilpunkte erhaltene und endlich auch das durch die Ecktransversalen als Seiten bestimmte Dreieck dem Grunddreieck symbrocardal.

Bew. 1. Zwischen den Winkeln des Grunddreiecks, den Winkeln des Transversalendreiecks und den Teilen der Winkel des Grunddreiecks, welche durch die Ecktransversalen gebildet werden, finden mannigfache Relationen statt, die an sich merkwürdig sind und leicht zum Satze führen; wir wollen dieselben daher zunächst ableiten.

Die Teilpunkte auf den Seiten des Dreiecks ABC (Fig. 73) seien A_1, B_1, C_1, so daß $BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = AC_1 : C_1B = m : n$ ist; die Transversalen AA_1, BB_1, CC_1 mögen dann das Dreieck XYZ bilden, dessen Winkel ξ, η, ζ seien; ferner sei noch:

$$A(CA_1) = \alpha_1,\quad A(A_1B) = \alpha_2,\quad B(AB_1) = \beta_1,\quad B(B_1C) = \beta_2,$$
$$C(BC_1) = \gamma_1,\quad C(C_1A) = \gamma_2.$$

Die Vergleichung der Inhalte von ACA_1 und AA_1B ergiebt:

$$\sin\alpha_1 \sin\beta : \sin\alpha_2 \sin\gamma = n : m, \text{ oder}$$
$$m \sin\alpha_1 \sin\beta = n \sin(\alpha - \alpha_1) \sin\gamma, \text{ oder endlich}$$
$$n\cot\alpha_1 = (m+n)\cot\alpha + m\cot\gamma, \text{ ebenso}$$

1)
$$m\cot\alpha_2 = (m+n)\cot\alpha + n\cot\beta,$$
$$n\cot\beta_1 = (m+n)\cot\beta + m\cot\alpha,$$
$$m\cot\beta_2 = (m+n)\cot\beta + n\cot\gamma,$$
$$n\cot\gamma_1 = (m+n)\cot\gamma + m\cot\beta,$$
$$m\cot\gamma_2 = (m+n)\cot\gamma + n\cot\alpha.$$

Man findet hieraus folgende andere Formeln:

2)
$$n\cot\alpha_1 - m\cot\alpha_2 = m\cot\gamma - n\cot\beta, \text{ u. s. w.}$$
$$m\cot\beta_2 - n\cot\gamma_1 = n\cot\beta - m\cot\gamma, \text{ u. s. w.;}$$

also $n \cot \alpha_1 - m \cot \alpha_2 = n \cot \gamma_1 - m \cot \beta_2$

oder $n (\cot \alpha_1 - \cot \gamma_1) = m (\cot \alpha_2 - \cot \beta_2)$, u. s. w.;

dann 3) $n \cot \beta_1 + m \cot \gamma_2 = (m + n) (\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma) = (m + n) \cot \omega$;

4) $n (\cot \alpha_1 + \cot \beta_1 + \cot \gamma_1) = (2 m + n) \cot \omega$,

$m (\cot \alpha_2 + \cot \beta_2 + \cot \gamma_2) = (m + 2 n) \cot \omega$.

Der Satz des Menelaus giebt

$A_1Z : A_1Y : A_1A = m^2 : n^2 : m^2 + mn + n^2 = C_1Y : C_1X : C_1C$ u. s. w.

Auch ist:

$\sin \alpha_2 : \sin \eta = C_1Y : AC_1$, $\sin \beta_1 : \sin \xi = C_1X : BC_1$, also

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_1} : \frac{\sin \eta}{\sin \xi} = \frac{C_1Y}{C_1X} : \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{m^2}{n^2} : \frac{m}{n} = m : n, \text{ also}$$

$n \sin \xi : m \sin \eta = \sin \beta_1 : \sin \alpha_2 = \sin (\zeta - \alpha_2) : \sin \alpha_2$,

$$\frac{m \sin (\zeta - \alpha_2)}{\sin \zeta \sin \alpha} = \frac{n \sin \xi}{\sin \zeta \sin \eta}, \text{ oder endlich}$$

$m \cot \alpha_2 = n \cot \eta + (m + n) \cot \zeta$, ebenso

$n \cot \alpha_1 = m \cot \zeta + (m + n) \cot \eta$,

$m \cot \beta_2 = n \cot \zeta + (m + n) \cot \xi$,

$n \cot \beta_1 = m \cot \xi + (m + n) \cot \zeta$,

$m \cot \gamma_2 = n \cot \xi + (m + n) \cot \eta$,

$n \cot \gamma_1 = m \cot \eta + (m + n) \cot \xi$.

Dies giebt

5) $n \cot \beta_1 + m \cot \gamma_2 = (m + n) (\cot \xi + \cot \eta + \cot \zeta)$.

Aus 3) und 5) folgt endlich

$$\cot \xi + \cot \eta + \cot \zeta = \cot \omega.$$

Das Dreieck XYZ ist dem Dreieck ABC umschrieben, also ABC dem Dreieck XYZ eingeschrieben und zwar so, daß die Seiten von XYZ durch A, B, C fortlaufend nach demselben Verhältnis geteilt sind. Da $A_1B_1C_1$ in ganz ähnlicher Weise dem Dreieck ABC eingeschrieben ist, so ist auch $A_1B_1C_1$ dem Dreieck ABC symbrocardal.

Es ist auch $AA_1 : BB_1 : CC_1 = YZ : ZX : XZ$,

daher das durch die Seiten AA_1, BB_1, CC_1 bestimmte Dreieck dem Dreieck XYZ ähnlich, also mit ABC symbrocardal.

Bew. 2. Ein zweiter Beweis sei noch gegeben, da er zu einigen weiteren Folgerungen führt.

Man denke sich ein Dreieck $A_{\prime\prime}B_{\prime\prime}C_{\prime\prime}$, welches symbrocardal mit ABC ist, diesem Dreieck eingeschrieben und setze $BA_{\prime\prime} = x$, $CB_{\prime\prime} = y$,

$AC_{„} = z$. Ist dann $\triangle_{„}$ der Inhalt von $A_{„}B_{„}C_{„}$ und sind die Seiten $a_{„}$, $b_{„}$, $c_{„}$, so gilt die Relation:

$$1) \quad \frac{\triangle_{„}}{\triangle} = \frac{a_{„}^2 + b_{„}^2 + c_{„}^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Nun ist:

$$a_{„}^2 = b^2 - 2by + y^2 + z^2 - 2z(b - y)\cos\alpha.$$

Setzt man $2\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc}$, so ergiebt sich nach einfachen Umformungen:

$$a_{„}^2 = b^2 + y^2 + z^2 - 2by - cz + \frac{z}{c}(b^2 - a^2) + \frac{ayz}{abc}(b^2 + c^2 - a^2),$$

also

$$a_{„}^2 + b_{„}^2 + c_{„}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) - 3(ax + by + cz) + \frac{x}{a}(b^2 - c^2) + \frac{y}{b}(c^2 - a^2) + \frac{z}{c}(a^2 - b^2) + \frac{ayz(b^2 + c^2 - a^2) + bzx(c^2 + a^2 - b^2) + cxy(a^2 + b^2 - c^2)}{abc}.$$

Das Dreieck ABC oder $\triangle$ wird durch die Seiten des Dreiecks $A_{„}B_{„}C_{„}$ in 4 Teile zerlegt, von denen $\triangle_{„}$ der eine ist, während die andern mit $\triangle_a$, $\triangle_b$, $\triangle_c$ bezeichnet werden mögen. Man erhält für diese:

$$\triangle_a = \frac{az(b - y)\triangle}{abc}, \quad \triangle_b = \frac{bx(c - z)}{abc}\triangle, \quad \triangle_c = \frac{cy(a - x)\triangle}{abc},$$

aus denen folgt:

$$\triangle_{„} = \frac{\triangle}{abc}\left\{abc - az(b - y) - bx(c - z) - cy(a - x)\right\}$$
$$= \frac{\triangle}{abc}\left\{xyz + (a - x)(b - y)(c - z)\right\}.$$

Die Gleichung 1) geht daher über in:

$$\frac{a_{„}^2 + b_{„}^2 + c_{„}^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{xyz + (a - x)(b - y)(c - z)}{abc}.$$

Führt man hier den oben gefundenen Wert von $a_{„}^2 + b_{„}^2 + c_{„}^2$ ein, so findet man nach einigen Umformungen:

$$abc(x^2 + y^2 + z^2) - (a^3yz + b^3zx + c^3xy) = bcx(a^2 - b^2) + cay(b^2 - c^2) + abz(c^2 - a^2).$$

Hieraus folgt, daß jedem Werte von x und y 2 Werte von z entsprechen, was auch aus andern Gründen folgt. Ferner wird den Gleichungen genügt durch: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x = a$, $y = b$, $z = c$, welche Werte zum Grundbreieck führen. Zerlegen wir aber jene Gleichungen in die beiden:

$$abc\,(x^2+y^2+z^2)-(a^3yz+b^3zx+c^3xy)=0,$$
$$bcx\,(a^2-b^2)+cay\,(b^2-c^2)+abz\,(c^2-a^2)=0,$$

so finden wir, daß jene Werte jeder dieser Gleichungen genügen. Da sie aber homogen sind, so genügen denselben auch die Gleichungen:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{m}{n}.$$

Dies giebt aber unsern Satz. Vorher folgte daraus, daß XYZ symbrocardal mit ABC ist, diese Eigenschaft auch für $A_1B_1C_1$. Man kann aber ebenso diese Eigenschaft für XYZ aus der von $A_1B_1C_1$ folgern.

54. Alle Dreiecke $A_nB_nC_n$, welche in ABC eingeschrieben und einem Dreieck $A_1B_1C_1$ ähnlich sind, haben einen gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt (Drehpunkt), aus dem sich die Lage der Ecken aller Dreiecke $A_nB_nC_n$ leicht bestimmen läßt.

Bew. Zunächst läßt sich leicht einsehen, daß es nur eine einfache unendliche Reihe solcher Dreiecke giebt z. B. daraus, daß die Richtung einer Seite die Lage der Ecken des Dreiecks bestimmt. Es sei dann $A_nB_nC_n$ ein Dreieck, das den Bedingungen entspricht, und dessen Winkel mit ξ, η, ζ bezeichnet werden mögen.

Legen wir nun die Umkreise um AB_nC_n, BC_nA_n, CA_nB_n, so werden sich dieselben in einem Punkte P schneiden. Mittelst des Satzes vom Peripheriewinkel folgt leicht:

$P(BA_n) = C_n(BA_n)$, $P(A_nC) = B_n(A_nC)$, also
$P(BC) = C_n(BA_n)+B_n(A_nC) = 360^0-\eta-\zeta-(180^0-\alpha) = \alpha+\xi.$

Da ebenso $P(CA) = \beta+\eta$, $P(AB) = \gamma+\zeta$ ist, so ist der Punkt P derselbe für alle Dreiecke mit den Winkeln ξ, η, ζ. Die Kreisvierecke PB_nAC_n, PC_nBA_n führen noch zu der Folgerung, daß PA_n und BC, PB_n und CA, PC_n und AB denselben Winkel bilden. Trägt man daher an die Geraden PA_n, PB_n, PC_n in gleicher Weise fortschreitend denselben Winkel an, so werden die neuen Schenkel auf den Seiten BC, CA, AB 3 Punkte bestimmen, die ein Dreieck geben, das $A_nB_nC_n$ ähnlich ist. Man hat damit ein Mittel gewonnen, das ganze System der ähnlichen Dreiecke $A_nB_nC_n$ zu erhalten. Daß P der Ähnlichkeitspunkt oder Drehpunkt dieser Dreiecke ist, ergiebt sich aus der Unveränderlichkeit des laufenden Verhältnisses $PA_n : PB_n : PC_n$.

55. Die Dreiecke, deren Ecken die Fußpunkte der Lote eines Punktes des Brocardschen Kreises auf die Seiten des Grunddreiecks sind, haben mit demselben den Brocardschen Winkel gemein.

Bew. Es seien A_1, B_1, C_1 3 Punkte auf den Seiten des Grunddreiecks ABC, welche dieselben nach gleichem Verhältnisse teilen, so

daß $A_1B_1C_1$ symbrocardal zu ABC ist; es seien ferner A_0, B_0, C_0 die Mitten der Seiten von ABC und A'B'C' das erste Brocardsche Dreieck; dann findet man leicht folgende Proportion: $A'A_0 : B'B_0 : C'C_0 = A_1A_0 : B_1B_0 : C_1C_0$; daher ist $A'A_0A_1 \sim B'B_0B_1 \sim C'C_0C_1$, also $A'(A_0A_1) = C'(C_0C_1)$. Ist nun M der Mittelpunkt des Umkreises von ABC und schneiden sich $A'A_1$ und $C'C_1$ in P, so folgt aus der Gleichheit der angegebenen Winkel, daß C'PMA' auf einem Kreise liegen. Daraus ergiebt sich die weitere Folgerung:

$$P(C'A') = M(C'A') = \beta.$$

Daher liegt P auf dem Brocardschen Kreise und der durch B, A_1, C_1 gelegte Kreis geht durch P. In gleicher Weise folgt, daß auch die um AC_1B_1 und CA_1B_1 gelegten Kreise durch P gehen, durch welchen Punkt auch die Gerade $B'B_1$ geht. Es ist somit P der Ähnlichkeitspunkt für alle dem Dreieck ABC eingeschriebenen Dreiecke, welche dem Dreieck $A_1B_1C_1$ ähnlich sind. Fällt man daher von P auf die Seiten von ABC die Lote, so ist auch das Fußpunktendreieck ähnlich $A_1B_1C_1$ und symbrocardal zu ABC. Durch die Änderung des Verhältnisses $BA_1 : A_1C$ verschiebt sich der Punkt, bleibt aber stets auf dem Brocardschen Kreise, wodurch der Satz bewiesen ist.

Mittelst des vorigen Satzes erkennt man leicht folgende Erweiterung (Neuberg):

Nennt man ein Brocardsches Büschel ein Strahlenbüschel P(XYZ), so daß P(YZ), P(ZX), P(XY) die Supplemente der Winkel des Dreiecks sind und stellt den Scheitel P eines solchen Büschels in einen beliebigen Punkt des Brocardschen Kreises, so schneiden die Strahlen PX, PY, PZ die Seiten des Dreiecks ABC, die dabei entsprechend gewählt werden müssen, in solchen 3 Punkten, daß die dadurch bestimmten Dreiecke symbrocardal zum Grunddreieck sind.

56. Hat man 2 Ebenen E und F, welche einen willkürlichen Winkel einschließen, und projiziert 2 beliebig gelegene gleichseitige Dreiecke in der einen Ebene auf die andere orthogonal, so sind die Projektionsdreiecke einander symbrocardal.

Bew. Es sei $\alpha\beta\gamma$ ein gleichseitiges Dreieck der Ebene E, dessen Projektion auf die Ebene F das Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c ist; ferner seien α_1, β_1, γ_1 3 Punkte auf den Seiten von $\alpha\beta\gamma$, welche dieselben in gleichem Verhältnisse teilen, und $A_1B_1C_1$ die Projektion von $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ auf F. Da A_1, B_1, C_1, die Seiten von ABC in gleichem Verhältnis teilen, so ist $A_1B_1C_1$ symbrocardal zu ABC; $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ ist aber ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten eine willkürliche Richtung in der Ebene E haben können.

Wir schließen daraus, daß der Brocardsche Winkel des Dreiecks ABC nur von dem Winkel der beiden Ebenen abhängig ist. Es läßt sich dies auch durch eine einfache Rechnung nachweisen. Ist x die Seite des gleichseitigen Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ und ψ der Winkel der Ebenen E und F, so gelten die Gleichungen:

$$x^2 = a^2 + (\beta B - \gamma C)^2 = b^2 + (\gamma C - \alpha A)^2 = c^2 + (\alpha A - \beta B)^2.$$

Hieraus folgt sofort:

1) $$\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - c^2} = 0,$$

wobei natürlich das Wurzelzeichen doppeldeutig zu nehmen ist.

Machen wir die Gleichung 1) rational so wird sie:

2) $$3x^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)x^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 0$$

oder $$3x^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)x^2 + 16\triangle^2 = 0.$$

Es ist ferner $\alpha\beta\gamma = \frac{x^2}{4}\sqrt{3}$, $a^2 + b^2 + c^2 = 4\triangle \cot\omega = x^2\sqrt{3}\cos\psi\cot\omega$,

$\triangle = \frac{x^2}{4}\sqrt{3}\cos\psi$, daher geht die Gleichung 2) über in:

3) $$\cos^2\psi - 2\cos\psi\frac{\cot\omega}{\sqrt{3}} + 1 = 0, \text{ also}$$

$$\cos\psi + \frac{1}{\cos\psi} = \frac{2\cot\omega}{\sqrt{3}} = 2\cot\omega\cot 60^0,$$

$$\cos\psi = \cot\omega\cot 60^0 - \sqrt{\cot^2\omega\cot^2 60^0 - 1}.$$

Bem. Wir fügen noch hinzu, daß $\cos\psi$ auch die Form $\sqrt{\frac{\cot\varphi_2}{\cot\varphi_1}}$ annehmen kann, wo φ_1 und φ_2 die Winkel sind, welche der Gleichung genügen $\sin(2\varphi + \omega) = 2\sin\omega$.

Man wird endlich hieraus noch den Schluß ziehen, daß alle Dreiecke, die einer Ellipse umschrieben sind, so daß der Mittelpunkt der Ellipse mit dem Schwerpunkt des Dreiecks übereinstimmt, symbrocardal sind.

57. Wenn man über einer gegebenen Basis BC eine Reihe von symbrocardalen Dreiecken konstruiert, so liegen die Spitzen A auf einem Kreise, der die um B und C mit BC beschriebenen Kreise rechtwinklig schneidet, und wobei die Verbindungslinien des Mittelpunktes des Kreises mit den Ecken der Basis BC den doppelten Brocardschen Winkel bilden.

Man bezeichnet den angegebenen Kreis als Neubergschen Kreis.

Bew. Die um B und C mit BC konstruierten Kreise mögen sich (Fig. 74) in S und T schneiden, auf der Mittelsenkrechten ST von BC

sei ein Punkt N so gewählt, daß $N(BC) = 2\omega$ ist, und von demselben ein Kreis geschlagen, der die vorigen rechtwinklig schneidet. Wir bezeichnen ferner den Mittelpunkt von BC mit M, einen beliebigen Punkt des Kreises um N mit A, die Länge von BC mit a und N(MA) mit ψ. Dann ergeben sich folgende Gleichungen:

$$AB^2 = BN^2 + NA^2 - 2BN \cdot AN \cdot \cos(\psi + \omega),$$
$$AC^2 = CN^2 + NA^2 - 2CN \cdot AN \cdot \cos(\psi - \omega),$$

also $AB^2 + AC^2 = 2CN^2 + 2AN^2 - 4AN \cdot CN \cos\psi \cdot \cos\omega.$

$$CN = \frac{a}{2\sin\omega}, \quad AN^2 = NS \cdot NT = \frac{a}{2}(\cot\omega - \sqrt{3}) \cdot \frac{a}{2}(\cot\omega + \sqrt{3})$$
$$= \frac{a^2}{4}(\cot^2\omega - 3),$$
$$NA = \frac{a}{2}\sqrt{\cot^2\omega - 3}.$$

Dies giebt durch Einsetzen:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 = \frac{a^2}{2\sin^2\omega}(2\sin^2\omega + 1 + \cos^2\omega - 3\sin^2\omega$$
$$- 2\sin\omega\cos\omega\cos\psi\sqrt{\cot^2\omega - 3})$$
$$= a^2\cot\omega(\cot\omega - \cos\psi\sqrt{\cot^2\omega - 3}).$$

Nehmen wir BC als Basis des Dreiecks ABC, so ist die Höhe $NM - NA\cos\psi = \frac{a}{2}\cot\omega - \frac{a}{2}\cos\psi\sqrt{\cot^2\omega - 3}$, also der Inhalt:

$$\triangle = \frac{a^2}{4}(\cot\omega - \cos\psi\sqrt{\cot^2\omega - 3}), \text{ und daher}$$
$$\frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{4\triangle} = \cot\omega,$$

d. h. der Brocardsche Winkel von ABC ist ω.

Bem. 1. Ist BU eine Tangente von B an den Kreis von Neuberg, und setzt man $B(NU) = X$, so findet sich

$$\cos X = \frac{a}{NB} = 2\sin\omega, \text{ also } \sin X = \sqrt{1 - 4\sin^2\omega}.$$

Bezeichnet man die Winkel, welche der Gleichung $\sin(2\varphi + \omega) = 2\sin\omega$ genügen, mit φ_1 und φ_2, so ergiebt sich $X = \varphi_2 - \varphi_1$, also da $\varphi_1 + \varphi_2 + \omega = 90^0$, und $B(NM) = 90^0 - \omega$ ist,

$$B(MU) = 90^0 - \omega - \varphi_2 + \varphi_1 = 2\varphi_1.$$

Ebenso wird die zweite Tangente mit BC den Winkel $2\varphi_2$ bilden; die merkwürdigen Winkel des Dreiecks finden wir also alle in dieser Figur.

Bem. 2. Die Winkel eines Dreiecks sind durch 2 von ihnen bestimmt, im allgemeinen durch 2 Bedingungen; ist also der Brocardsche Winkel bestimmt, so sind alle übrigen noch durch einen bestimmt, es werden daher alle Dreiecke, die im Brocardschen Winkel und noch einem übereinstimmen, ähnlich sein, wie eine Rechnung auch leicht ergiebt. Die Änderung eines Winkels muß also die der übrigen nach sich ziehen. Man kann aber die Frage stellen: Wenn in einem Dreiecke 2 Ecken und der Brocardsche Winkel fest sind, welches ist die Lage der dritten Ecke? Diese Frage wird durch den letzten Satz beantwortet.

58. Folgerungen besonders auf Dreiecke, deren Schwerliniendreieck dem Grunddreieck ähnlich ist.

Zunächst wird man leicht die Richtigkeit des Satzes erkennen: Konstruiert man über einer Geraden 6 ähnliche Dreiecke, so liegen deren Spitzen in einem Kreise.

Ferner: Zieht man vom Mittelpunkt M einer Geraden BC eine Sekante durch den einem Winkel entsprechenden Neubergschen Kreis, welche denselben in V und X schneidet, so ist das Schwerliniendreieck des einen Dreiecks dem andern ähnlich.

Bew. (Fig. 74). Der Schwerpunkt des Dreiecks BCV sei G. Zunächst ist $MV \cdot MX = MN^2 - NV^2 = \frac{a^2}{4}\cot^2\omega - \frac{a^2}{4}(\cot^2\omega - 3)$ $= \frac{3}{4}a^2$; da $MG = \frac{1}{3}MV$, so ist $MG \cdot MX = \frac{a^2}{4} = MB^2$.

Es wird daher der durch BGX gelegte Kreis BC in B berühren, und außerdem ist B(GM) = X(BG), also da G(BM) = X(BG) + B(GX) ist, auch G(BM) = B(MX) = B(CX).

Ebenso berührt der durch XGC gelegte Kreis die Gerade BC in C, daher ist G(CM) = C(BX). Verlängert man aber GM um sich selbst bis F, so ist BGF ein Dreieck, das dem Schwerliniendreieck von BCV ähnlich ist. Da nun F(BG) = G(MC) ist, so stimmen also 2 Winkel das Dreieck BGF mit dem von BCX überein, womit die Behauptung bewiesen ist, daß $BCX \sim GFB$ ist.

Zieht man demnach von M die Tangente MW an den Neubergschen Kreis, so erhält man ein Dreieck BCW, das seinem Schwerliniendreieck ähnlich ist. Dabei ist zu beachten, daß, wenn den Seiten a, b, c die Schwerlinien a_0, b_0, c_0 so entsprechen, daß a_0 die Seite a, b_0 die Seite b, c_0 die Seite c halbiert, die Proportion gilt $a : b : c = a_0 : c_0 : b_0$.

59. Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks ABC gleichwendig ähnliche Dreiecke J_aBC, J_bCA, J_cAB in der Weise, daß an

den zu gleicher Stelle stehenden Ecken gleiche Winkel liegen, so schneiden sich die Ecktransversalen AJ_a, BJ_b, CJ_c in einem Punkte,

1) wenn die Dreiecke gleichschenklig sind, so daß an jeder Ecke des Grunddreiecks die gleichen Winkel liegen;

2) wenn die Dreiecke J_aBC, J_bCA, J_cAB mit dem Grunddreieck symbrocardal sind.

Bew. Der Beweis des ersten Teiles kann leicht durch den Satz von Ceva geliefert werden; es lassen sich jedoch die beiden Teile zugleich erledigen. Wir denken zu dem Ende die Winkel der angegebenen Dreiecke so bestimmt, daß die Transversalen sich in einem Punkte schneiden, und stellen dann die Bedingung für die Winkel fest.

Man setze $B(J_aC) = \lambda$, $C(BJ_a) = \mu$, $J_a(BC) = \nu$, die Entfernungen des Schnittpunktes E der Transversalen von den Seiten bez. e_a, e_b, e_c, wobei dieselben positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem die Lote von E auf die Seiten in demselben Flächenteile liegen als das Dreieck oder nicht. Es ergiebt sich dann:

$$e_b : e_c = CJ_a \sin(\gamma - \mu) : BJ_a \sin(\beta - \lambda) = \sin\lambda \sin(\gamma - \mu) : \sin\mu \sin(\beta - \lambda)$$
$$= \sin\gamma(\cot\mu - \cot\alpha) : \sin\beta(\cot\lambda - \cot\beta);$$

ebenso $e_c : e_a = \sin\alpha(\cot\mu - \cot\beta) : \sin\gamma(\cot\lambda - \cot\gamma)$,

$e_a : e_b = \sin\beta(\cot\mu - \cot\gamma) : \sin\alpha(\cot\lambda - \cot\alpha)$.

Durch Multiplikation erhält man die Bedingungsgleichung:

$$(\cot\lambda - \cot\alpha)(\cot\lambda - \cot\beta)(\cot\lambda - \cot\gamma) - (\cot\mu - \cot\alpha)(\cot\mu - \cot\beta)(\cot\mu - \cot\gamma) = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich durch $\cot\lambda - \cot\mu$ ohne Rest dividieren, welches die erste Behauptung beweist, daß die Transversalen sich in einem Punkte schneiden, wenn die ähnlichen Dreiecke gleichschenklig sind. Nach der Division erhält man:

$$\cot^2\lambda + \cot\lambda\cot\mu + \cot^2\mu - (\cot\lambda + \cot\mu)(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma) + \cot\beta\cot\gamma + \cot\gamma\cot\alpha + \cot\alpha\cot\beta = 0.$$

Da $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\omega$, $\cot\beta\cot\gamma + \cot\gamma\cot\alpha + \cot\alpha\cot\beta = 1$ ist, so folgt:

$$\cot^2\lambda + \cot\lambda\cot\mu + \cot^2\mu - (\cot\lambda + \cot\mu)\cot\omega + 1 = 0.$$

Addiert man hierzu die richtige Gleichung:

$\cot\mu\cot\nu + \cot\nu\cot\lambda + \cot\lambda\cot\mu - 1 = 0$, so erhält man:

$$(\cot\lambda + \cot\mu)^2 + (\cot\lambda + \cot\mu)(\cot\nu - \cot\omega) = 0,$$

oder endlich $(\cot\lambda + \cot\mu)(\cot\lambda + \cot\mu + \cot\nu - \cot\omega) = 0$.

Ist also $\cot\lambda + \cot\mu + \cot\nu = \cot\omega$, d. h. sind die Ansatzdreiecke symbrocardal mit dem Grunddreieck, so schneiden sich die angegebenen Ecktransversalen in einem Punkte.

Zweiter Teil.

Sätze aus der Brocardschen Geometrie, die vorzugsweise Eigenschaften von besonderen Kegelschnitten enthalten.

---

60. Erklärende Begriffe, die sich an die Grundeigenschaften der Kegelschnitte anschließen.

Vorher (51 ff.) sind Punkte mittelst eines Dreiecks in Beziehung gesetzt worden, welche als Winkelgegenpunkte, kürzer auch als Gegenpunkte oder inverse Punkte bezeichnet wurden. Denken wir uns nun zu allen Punkten einer Geraden die Winkelgegenpunkte bestimmt, so werden diese eine Kurve durchlaufen, von der wir sagen, sie ist der Geraden isogonal verwandt. Die Art der Verwandtschaft im allgemeinen läßt sich leicht feststellen. Verbinden wir die Punkte der Geraden zunächst mit 2 Ecken des Dreiecks ABC etwa mit B und C, so entstehen 2 projektivische Büschel in perspektivischer Lage. Um nun die Winkelgegenpunkte zu erhalten, müssen wir die Büschel so umlegen, daß sie unter Beibehaltung der Mittelpunkte den entgegengesetzten Drehungssinn erhalten. Die dadurch erhaltenen Strahlbüschel sind dann, weil sie den vorigen gleich sind, ebenfalls projektivisch, aber die perspektivische Lage ist aufgehoben; der Ort der Winkelgegenpunkte ist daher ein Kegelschnitt. Derselbe muß durch alle Ecken des Dreiecks gehen; durch B und C nämlich, weil diese Punkte die Mittelpunkte der Büschel sind, durch A, weil den entsprechenden Strahlen BC und CB die Strahlen BA und CA entsprechen, so daß A der Punkt ist, welcher dem Schnittpunkt der Geraden mit BC isogonal entspricht. Es kann also eine Ecke des Grunddreiecks jedem Punkte der Gegenseite isogonal entsprechen.

2 Winkelgegenpunkte entsprechen sich gegenseitig, d. h. ist Q der Winkelgegenpunkt von P, so ist auch P der Winkelgegenpunkt von Q. Daher wird umgekehrt dem um ABC gelegten Kegelschnitt die vorher angenommene Gerade isogonal entsprechen; es wird dann leicht einzusehen sein, daß allen um das Dreieck ABC gelegten Kegelschnitten durch isogonale Verwandtschaft Gerade entsprechen werden, die man

leicht auch konstruieren kann. Es schneide nämlich die Tangente an der Ecke A die Gegenseite BC in A'; trägt man dann den Winkel, den AA' mit AB bildet, an AC entsprechend an, so muß auf dieser Geraden der Punkt liegen, der dem Punkte A isogonal entspricht; da aber dieser Punkt auf BC liegen muß, so ist es der Schnittpunkt des angetragenen zweiten Winkelschenkels mit BC. Macht man diese Operation bei allen 3 Ecken, so erhält man 3 Punkte der Geraden. Daß diese Punkte auf einer Geraden liegen, folgt aus dem Satze von Menelaus und einem bekannten Satze von den Kegelschnitten.

61. Bestimmung der Art des Kegelschnitts, der einer Geraden durch isogonale Verwandtschaft entspricht.

Wir nehmen als Gerade, zu der wir die Winkelgegenpunkte suchen, die Linien in der Unendlichkeit. Nach Nr. 94 liegen die Winkelgegenpunkte der Punkte in der Unendlichkeit auf dem Umkreise, daher entsprechen sich der Umkreis und die Unendlichkeitsgerade isogonal. Aus der Lage der Geraden in Bezug auf den Umkreis läßt sich daher die Art des Kegelschnitts leicht bestimmen. Schneidet die Gerade den Umkreis nicht, so muß der isogonal verwandte Kegelschnitt eine Ellipse sein, da kein Punkt des Kegelschnitts in der Unendlichkeit liegt. Schneidet die Gerade den Umkreis, so ist der isogonal verwandte Kegelschnitt eine Hyperbel; denn er hat 2 Punkte in der Unendlichkeit. Es schneide eine Gerade den Umkreis in P und Q, dann bestimmt die zu AP gehörige Gegentransversale den Punkt in der Unendlichkeit des zugehörigen Kegelschnitts, d. h. die Richtung der Asymptote; ebenso bestimmt die Gegentransversale zu AQ die Richtung der andern Asymptote. Da nun AP und AQ denselben Winkel bilden, als ihre Gegentransversalen, so folgt: Die Asymptoten der isogonal einer Geraden verwandten Hyperbel bilden einen Winkel, der gleich dem Peripheriewinkel ist, welcher zu dem Bogen gehört, den die Gerade vom Umkreise abschneidet.

Geht die Gerade durch den Mittelpunkt des Umkreises, so ist die isogonal verwandte Hyperbel gleichseitig, was auch daraus schon folgt, daß der Winkelgegenpunkt des Mittelpunkts vom Umkreise der Höhenschnittpunkt ist.

Ist die Gerade eine Tangente an den Umkreis, so ist der isogonal verwandte Kegelschnitt eine Parabel.

Es macht keine Schwierigkeit, auch die Fälle zu erledigen, wenn die Gerade durch eine Ecke geht. Man wird leicht erkennen, daß der zugehörige Kegelschnitt ein Geradenpaar wird.

A. Die Parabeln von Artzt und Kiepert.

62. Ähnliche Punktreihen auf den Seiten des Grunddreiecks und die Parabeln (bc), (ca), (ab).

Die Grundbezeichnungen sollen der Hauptsache nach die frühern bleiben, jedoch müssen einige Veränderungen eintreten. Das Grunddreieck heißt ABC, wobei $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ ist. Die Mittelpunkte der Seiten sollen X_0, Y_0, Z_0 heißen, während das Brocardsche erste Dreieck die alte Bezeichnung behalten soll, das zweite Brocardsche Dreieck soll A″B″C″ heißen, während die Brocardschen Punkte, sowie die symmetrisch bestimmten Punkte ihre frühere Bezeichnung beibehalten sollen, also G der Schwerpunkt, L der Punkt von Lemoine ꝛc.

Wir nehmen nun ähnliche Punktreihen auf den Seiten des Dreiecks an. Ein System solcher Punkte A_p, B_p, C_p soll zusammengehören, wenn die laufende Proportion stattfindet: $BA_p : CB_p : AC_p = a:b:c$. Die Projektionsstrahlen von je 2 solchen Punktreihen werden eine Parabel berühren, so daß wir 3 solche Parabeln erhalten, welche wir mit (bc), (ca), (ab) bezeichnen. Dasselbe ist das erste System der Parabeln von Artzt. Die Parabel (bc) wird natürlich durch Projektionsstrahlen bestimmt, welche die Seiten b und c in entsprechenden Punkten schneidet. Ein Projektionsstrahl (Tangente) der Parabel ist offenbar Y_0Z_0. Selbstverständlich ist es nur nötig, die Eigenschaften einer Parabel festzustellen.

63. Der Brennpunkt der Parabel (bc) ist der Fußpunkt des Lotes vom Mittelpunkt M des Umkreises auf die von der Ecke A ausgehende Symmediane.

Bew. Es sind AB und AC (Fig. 75) Tangenten der Parabel (bc), da diese Seiten die Träger der ähnlichen Punktreihen sind, welche die Parabel bestimmen. Dem Punkte A auf AC entspricht dabei B auf AB, so daß B der Berührungspunkt der Tangente AB ist; ebenso ist C der Berührungspunkt der Tangente AC. Bekannt ist nun, daß wenn von einer Parabel 2 Tangenten mit ihren Berührungspunkten gegeben sind, der Brennpunkt auf der Symmediane des Dreiecks liegt, das durch die Tangenten und die Verbindungslinie der Berührungslinie gebildet wird, natürlich auf der Symmediane, die dem Schnittpunkte der Tangenten angehört. Außerdem ist der Winkel, den die Verbindungslinien des Brennpunktes mit den Berührungspunkten von 2 Tangenten bilden, doppelt so groß als der Winkel der Tangenten. Damit ist der Satz bewiesen.

Man kann den Beweis auch führen, wenn man den Satz benutzt, daß der Brennpunkt stets auf dem Umkreise eines Tangentendreiecks liegt. Wir sehen AC als eine Tangente, AB als 2 zusammenfallende an, die sich in B schneiden. Daher liegt der Brennpunkt A″ auf einem Kreise, der durch B geht und AC in A berührt; ebenso auf einem Kreise, der durch C geht und AB in A berührt. Durch diese Kreise ist A″ bestimmt. Aus der Konstruktion folgt $A''(AC) = A''(AB) = 180^\circ - \alpha$, also $A''(BC) = 2\alpha$; es liegt also A″ auf dem Kreise, der durch die Ecken B und C und durch M geht. Da AA″ den Winkel A″(BC) halbiert, so geht diese Gerade durch den Mittelpunkt des zur Sehne BC im Kreise MBC gehörigen Bogens, welches der Pol A_p von BC in Bezug auf den Umkreis ist, daher ist AA″ Symmediane; da ferner $A''(MA) = B(MA_p) = 90^\circ$ ist, so ist A″ der Fußpunkt des Lotes von M auf die Symmediane AL.

64. Folgerungen:

a) $$AA''B \sim CA''A \sim Y_0A''Z_0 \sim AY_0X_0.$$

Bew. $A''(MA) = 90^\circ = Z_0(MA) = Y_0(MA)$, daher liegen $AZ_0A''MY_0$ auf einem Kreise, somit $Z_0(A''Y_0) = A(A''Y_0) = A(BX_0)$, ebenso $Y_0(A''Z_0) = A(CX_0)$, also $Y_0A''Z_0 \sim AY_0X_0$.

Ferner $A''(CA_p) = \alpha$, also $C(A''A) = A(A''B)$, somit enthält das Dreieck AA″C die Winkel $A(BX_0)$ und $A(X_0C)$, ebenso AA″B.

Man würde dies auch aus der Eigenschaft der Parabel folgern können, daß wenn man den Brennpunkt einer Parabel mit den Punkten verbindet, in welcher 2 Tangenten von einer beliebigen dritten geschnitten werden, die entstandenen Dreiecke ähnlich sind. Wir haben hier die Tangenten AB, AC, Y_0Z_0. Daß nun $A''AB \sim A''Y_0Z_0$ ist, folgt daraus, daß man AB als Tangente ansieht, die von sich selber in B geschnitten wird.

b) Ist A_0 der Mittelpunkt von Y_0Z_0, so liegen $H_aA''A_0$ in einer Geraden.

Bew. $AZ_0Y_0 \sim ABC$ und $AZ_0A''Y_0$ liegen auf einem Kreise, also ist AA″ die bis zum Umkreise von AZ_0Y_0 verlängerte Symmediane in diesem Dreieck; es liegt daher A_0A'' symmetrisch zur Schwerlinie AX_0 oder besser zur Verlängerung A_0X_0 in Bezug auf Y_0Z_0; ebenso liegt aber A_0H_a. — Daraus folgt noch sofort:

$$A_0A'' = \frac{a^2}{8a_0}. \quad (a_0 \text{ Schwerlinie Nr. 55 Anh.})$$

c) Der Kreis um BH_aA'' berührt Y_0Z_0 in Z_0, ebenso der Kreis um CH_aA'' dieselbe Gerade in Y_0.

Bew. $ABA'' \infty AX_0Y_0$ (Fig. 75), also auch $BA''Z_0 \infty X_0Y_0A_0$, daher $A''(BZ_0) = Y_0(X_0A_0) = \beta = H_a(BZ_0)$. Der um H_aBA_0'' gelegte Kreis geht daher auch durch Z_0 und berührt Y_0Z_0 in Z_0.

d) Die Verbindungslinie der Fußpunkte der vom Brennpunkt A'' auf AB und AC gefällten Lote $A_b''A_c''$ wird durch Y_0Z_0 halbiert.

Bew. $A_b''A_c''$ ist die Scheiteltangente der Parabel, also $A''A_b''A_c'' \infty A''Z_0Y_0 \infty AY_0X_0$. Da nun $A''A_c'' \perp AZ_0$, $A''A_b'' \perp X_0Z_0$, so auch $A_b''A_c'' \perp AX_0$, was auch daraus folgt, daß AX_0 Gegentransversale zu AA'' ist. Jede Parabeltangente teilt nun die von 2 festen Tangenten begrenzten Segmente der übrigen nach konstantem Verhältnis; da also Y_0Z_0 die Tangente AB in Z_0 halbiert, so muß sie auch $A_b''A_c''$ halbieren.

65. Der Halbparameter der Parabel (bc) wird durch $\frac{\triangle^2}{a_0^3}$ dargestellt. Es verhalten sich also die Parameter der Parabeln (bc), (ca), (ab) umgekehrt wie die Kuben der zugehörigen Schwerlinien.

Bew. Ist 2p der Parameter der Parabel (bc), so ist $\frac{p}{2}$ gleich dem Abstande des Brennpunktes A'' von $A_b''A_c''$, also ist

$$p = 2A''A_c'' \sin A_c''(A''A_b'') = 2A''A_c'' \sin A(A''C)$$
$$= 2AA'' \sin A(BA'') \sin A(A''C).$$

Es ist ferner $AA'' = \frac{1}{2}AA_5$, wenn A_5 der Schnittpunkt der Symmediane mit dem Umkreise ist. $AA_5 = \frac{bc}{a_0}$, wo a_0 die Schwerlinie von Ecke a ist; also $AA'' = \frac{bc}{2a_0}$.

$\sin A(BA'') : \sin\gamma = \frac{a}{2} : a_0$, $\sin A(A''C) : \sin\beta = \frac{a}{2} : a_0$, also

$$\sin A(BA'') \cdot \sin A(A''C) = \frac{a^2}{4a_0^2} \cdot \sin\beta \sin\gamma, \text{ daher}$$

$$p = \frac{bc}{a_0} \cdot \frac{a^2}{4a_0^2} \cdot \sin\beta \sin\gamma = \frac{ab \sin\gamma}{2} \cdot \frac{ac \sin\beta}{2} \cdot \frac{1}{a_0^3} = \frac{\triangle^2}{a_0^3}.$$

66. Das zweite System der Parabeln von Artzt.

Es sollen jetzt die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks als Träger ähnlicher Punktreihen angesehen werden. Wir bezeichnen sie als solche mit x, y, z, einen beliebigen Punkt von x mit X, von y mit Y, von z mit Z, und zwar sollen für X, Y, Z entsprechende Punkte genommen werden; die Mittelpunkte der Seiten sollen dem entsprechend mit X_0, Y_0, Z_0 bezeichnet werden. Es soll dann sein:

$$X_0X : Y_0Y : Z_0Z = a : b : c.$$

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte erzeugen dann wieder Parabeln, welche wir mit (yz), (zx), (xy) bezeichnen. Gemeinsam ist allen Punktreihen der Mittelpunkt M des Umkreises, für den wir in den einzelnen Punktreihen die entsprechenden in den andern suchen wollen. Denken wir uns M in der Punktreihe y und suchen den entsprechenden in der Punktreihe z. Da A(BH) = A(MC) ist, so entspricht dem Punkte M auf y der Schnittpunkt Z_y der Höhe AH mit der Mittelsenkrechten zur Höhe c; ebenso entspricht dem Punkte M auf z der Schnittpunkt Y_z der Höhe AH mit der Mittelsenkrechten y.

67. Die Höhe AH ist die Polare des Mittelpunktes M vom Umkreise in Bezug auf die Parabel (yz).

Bew. Dem Punkte M (Fig. 76) in den Punktreihen y und z entsprechen die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten z und y mit der Höhe AH. Diese Punkte Z_y und Y_z sind aber die Berührungspunkte der Tangente z und y. Da die Gerade Z_yY_z die Höhe AH ist, so ist AH die Polare von M.

68. Die von der Ecke A gezogene Schwerlinie ist die Leitlinie der Parabel (yz).

Bew. Ist AY eine Transversale, welche die Punktreihe y in einem Punkte Y trifft, so schneidet die Gegentransversale die Punktreihe z in dem entsprechenden Punkte Z. Als entsprechende Punkte sind auch Y_0 und Z_0 anzusehen, so daß Y_0Z_0 eine Tangente der Parabel (yz) ist. Es ergiebt sich daraus auch leicht, daß die innere und die äußere Halbierungslinie des Winkels α an der Ecke A Tangenten sind. Es ist endlich auch die Mittelsenkrechte von Y_0Z_0 eine Tangente. Schneidet nämlich dieselbe die Punktreihen y und z in Y_m und Z_m, und ist A_0 die Mitte von Y_0Z_0, dann ist:

$$\frac{Z_0Z_m}{Z_0A_0} = \frac{1}{\sin\beta'} \quad \frac{Y_0Y_m}{Y_0A_0} = \frac{1}{\sin\gamma'}, \text{ also}$$

$$\frac{Z_0Z_m}{Y_0Y_m} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{c}{b},$$

so daß sich Z_m und Y_m entsprechen. In A sowohl, als A_0 sind also die an die Parabel (yz) gezogenen Tangenten senkrecht zu einander, daher ist AA_0 oder AX_0 die Leitlinie der Parabel (yz).

69. Der Brennpunkt der Parabel (yz) ist der Brennpunkt A″ der Parabel (bc).

Bew. Der Brennpunkt muß auf dem Umkreise von MY_0Z_0 liegen, da die Seiten dieses Dreiecks Tangenten der Parabel sind. Dieser Umkreis wird erhalten, wenn man MA als Durchmesser nimmt. Ein

zweites Tangentendreieck wird aus Y_0Z_0 und den Halbierungslinien des Winkels α und seines Nebenwinkels an Ecke A gebildet. Nehmen wir den Umkreis des Dreiecks, das aus den Winkelhalbierungslinien der Ecke A und der Seite BC gebildet wird, so ist dies einer der apollonischen Kreise des Dreiecks, welcher durch den Schnittpunkt A_3 der zur Ecke A gehörigen Symmediane mit dem Umkreise geht. Daher muß der zu unserm Tangentendreieck gehörige Umkreis durch den Mittelpunkt A'' von AA_3 gehen. Da auch der erste Kreis durch A'' geht und A nicht in Frage kommt, so ist A'' der Brennpunkt.

70. Der Halbparameter der Parabel (yz) wird dargestellt durch

$$p_a = \frac{\triangle (b^2 - c^2)}{4 a_0^{\,3}}.$$

Bew. Da die Schwerlinie AX_0 die Leitlinie der Parabel ist, so ist, wenn ϑ den Winkel zwischen Symmediane und Schwerlinie bedeutet, der Halbparameter ausgedrückt durch

$$p_a = AA'' \cdot \sin\vartheta.$$

Ist nun $(ba_0) = \alpha_1$, $(a_0c) = \alpha_2$, so ist $\alpha_2 - \alpha_1 = \vartheta$, ferner

$$\sin\alpha_2 : \sin\alpha_1 = b : c, \text{ also}$$

$$\frac{\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1}{\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1} = \frac{b - c}{b + c}, \text{ und}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{b - c}{b + c} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)}, \text{ somit}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \operatorname{tg}\frac{^2\alpha}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right).$$

Es ist ferner

$$\sin\vartheta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^{\,2}\frac{\vartheta}{2}}, \text{ daher}$$

$$\sin\vartheta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{^2\alpha}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^{\,4}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^{\,2}\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right)} = \frac{8 \sin\frac{^2\alpha}{2} \cos\frac{^2\alpha}{2} \sin\frac{\beta - \gamma}{2} \cos\frac{\beta - \gamma}{2}}{4\cos\frac{^4\alpha}{2} \cos\frac{^2\beta - \gamma}{2} + 4\sin\frac{^4\alpha}{2} \sin\frac{^2\beta - \gamma}{2}}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha \sin(\beta - \gamma)}{4\cos^2\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{^4\alpha}{2} - \sin\frac{^4\alpha}{2}\right) + (1 - \cos\alpha)^2}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha \sin(\beta - \gamma)}{\cos\alpha(2 + 2\cos(\beta - \gamma)) + (1 - \cos\alpha)^2} = \frac{\sin^2\alpha \sin(\beta - \gamma)}{1 + 2\cos\alpha\cos(\beta - \gamma) + \cos^2\alpha}.$$

Ebenso ist ferner

$$4a_0^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 4r^2(2\sin^2\beta + 2\sin^2\gamma - \sin^2\alpha),$$

$$\text{also } a_0^2 = r^2(1 + 2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma) + \cos^2\alpha).$$

Da nun $AA'' = \frac{bc}{2a_0}$ ist (Nr. 95), so folgt

$$p_a = \frac{b\cdot c}{2a_0}\cdot\frac{\sin^2\alpha\sin(\beta-\gamma)}{1+2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)+\cos^2\alpha} = \frac{bc\cdot r^2\sin^2\alpha\sin(\beta-\gamma)}{2a_0\cdot a_0^2},$$

oder

$$p_a = \frac{\triangle\cdot r^2\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)}{a_0^3} = \frac{\triangle r^2(\sin^2\beta-\sin^2\gamma)}{a_0^3}$$

$$= \frac{\triangle(b^2-c^2)}{4a_0^3} = \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)}{1+2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)+\cos^2\alpha}.$$

71. Die Kreise, welche durch den Mittelpunkt M des Umkreises und je 2 entsprechende Punkte Y, Z der ähnlichen Punktreihen y, z gehen, bilden ein Büschel. Bestimmt man dazu die Kreise durch M und je entsprechende Punkte Z, X und X, Y der andern Punktreihen, so erhält man 3 Büschel. Diese 3 Büschel haben einen Kreis, nämlich den Brocardschen Kreis gemeinsam.

Bew. Sind Y und Z 2 entsprechende Punkte der Punktreihen y und z, so berührt YZ die Parabel (yz); es ist also MYZ ein Tangentendreieck, das durch den Brennpunkt A'' gehen muß. Alle Kreise, die so bestimmt werden, gehen also durch M und A''. Sind dann B'' und C'' die Brennpunkte der Parabel (zx) und (xy), so gehen die durch MZX und MXY bestimmten Kreise bez. durch B'' und C''. Da es nun einen Kreis durch M, A'', B'', C'' giebt, nämlich den Brocardschen Kreis, so ist derselbe allen Büscheln gemeinsam. Dies läßt sich durch die Betrachtung der Punktreihen auch direkt einsehen, was nicht ausgeführt werden soll. Nach dem, was über diese Kreise gesagt ist, muß derselbe die Mittelsenkrechten in solchen Punkten schneiden, die sich entsprechen. Sind A', B', C' diese Punkte, so muß also sein:

$$B(CA') = C(AB') = A(BC').$$

Dieser Winkel ist, wie bekannt, der Brocardsche Winkel ω; auch ist A'B'C' ein Dreieck, das der Schar XYZ angehört.

72. Die Winkel, welche die Seiten des Dreiecks A'B'C' mit den entsprechenden von ABC bilden, sind den Winkel gleich, welche der Brocardsche Durchmesser ML mit den Radien des Umkreises nach den Ecken bildet.

Bew. Es ist $M(A'A) = \beta - \gamma$; schneidet nun AM den Brocardschen Kreis in $\mathcal{A}$, so ist $M(A'\mathcal{A}) = B'(A'\mathcal{A}) = \beta - \gamma$. Ferner

$B'(A'C') = \beta$, also $B'(A'C') - B'(A'\mathfrak{A}) = B'(C'\mathfrak{A}) = \gamma$ oder

$A'(C'\mathfrak{A}) = \gamma$, also $\mathfrak{A}A' \parallel B'C'$.

Da auch $LA' \parallel BC$, so ist $A'(L\mathfrak{A}) = M(LA) = (BC, B'C')$.

73. Die Kollineationsachsen des Dreiecks ABC mit den Dreiecken XYZ berühren eine Parabel, die Kiepertsche Parabel heißt.

Bew. Die Dreiecke ABC und XYZ sind kollinear (Nr. 56 Anh.), da sich AX, BY, CZ in einem Punkte schneiden. Schneiden sich BC und YZ in $\mathfrak{A}$ (Fig. 76), CA und ZX in $\mathfrak{B}$, XY und AB in $\mathfrak{C}$, so ist die Gerade $\mathfrak{ABC}$ die Kollineationsachse der Dreiecke ABC und XYZ. Es schneide nun die Mittelsenkrechte x die Seite AC in X_γ, y die Seite BC in Y_γ, dann entsprechen sich X_γ und Y_γ, denn es ist

$$X_0X_\gamma : Y_0Y_\gamma = a : b.$$

Es schneide XZ die Gerade X_0Z_0 in Y' (Fig. 76) und YZ die Gerade Y_0Z_0 in X', dann ist $Y_0Y : YY_\gamma = Y_0X' : Y_\gamma\mathfrak{A}$, ferner: $X_0X : XX_\gamma = X_0Y' : X_\gamma\mathfrak{B}$; nun haben wir links die Stücke auf ähnlichen Punktreihen, also $Y_0Y : YY_\gamma = X_0X : XX_\gamma$, daher ist

$$Y_0X' : Y_\gamma\mathfrak{A} = X_0Y' : X_\gamma\mathfrak{B}.$$

Es wird X' durch Y_0Z_0 und YZ, also durch 2 Tangenten bestimmt, ähnlich Y', also bilden X' und Y' ähnliche Punktreihen auf Y_0Z_0 und X_0Z_0; denn die Punktreihen X' und y, ebenso Y' und x sind ähnlich. Auf den Punktreihen X' und Y' sind X_0 und Y_0 entsprechende Punkte. Um dies zu erkennen, denke man sich M als Z_μ auf z liegen und X_μ und Y_μ die entsprechenden Punkte in den Punktreihen x und y, dann wird Y_0Z_0, auf der die Punkte X' liegen von $Y_\mu Z_\mu$ oder y in Y_0, X_0Z_0 aber, auf der die Punkte Y' liegen, von $X_\mu Z_\mu$ d. h. x in X_0 geschnitten, so daß Y_0 und X_0 entsprechende Punkte der Punktreihen X' und Y' sind. Daher hat $X_0Y' : Y_0X'$ und also auch $X_\gamma\mathfrak{B} : Y_\gamma\mathfrak{A}$ einen konstanten Wert. Dies bedeutet, daß die Punkte $\mathfrak{A}$ nnd $\mathfrak{B}$ auf den Seiten a und b ähnliche Punktreihen sind mit den entsprechenden Punkten Y_γ und X_γ.

74. Die Parabel von Kiepert, welche durch die Kollineationsachse der Dreiecke ABC und XYZ erzeugt wird, ist dem Grunddreieck einbeschrieben.

Bew. Die Kollineationsachsen $\mathfrak{ABC}$ erzeugen auf BC und AC die ähnlichen Punkreihen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, wodurch die Parabel bestimmt wird. Nehmen wir die Punktreihe $\mathfrak{C}$ auf AB, welche ähnlich $\mathfrak{B}$ ist und ziehen $\mathfrak{BC}$, so erhalten wir dieselben Strahlen, so daß also auch AB berührt wird. Hieraus folgt noch, daß der Brennpunkt F dieser Parabel auf dem Umkreise liegt.

75. Die Leitlinie der Kiepertschen Parabel ist die Eulersche Gerade des Grunddreiecks.

Bew. Da die Parabel dem Grunddreieck einbeschrieben ist, so muß die Leitlinie durch den Höhenschnittpunkt H gehen. Es sind ferner X_γ und Y_γ (Fig. 76) entsprechende Punkte auf den Punktreihen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$, also $X_\gamma Y_\gamma$ ein Strahl $\mathfrak{ABC}$, also $Y_\gamma X_\gamma C$ ein Tangentendreieck der Parabel; da der Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks M ist, so geht die Leitlinie durch M, MH ist also die Leitlinie.

Man erkennt sofort, daß der Brennpunkt der Parabel der Schnittpunkt des Umkreises von ABC mit dem Umkreise von $Y_\gamma X_\gamma C$ ist. Für den letzten Umkreis können natürlich auch andere eintreten. Schneidet die Mittelsenkrechte x von BC die Seite AB in X_β und die Mittelsenkrechte z von AB die Seite BC in Z_β, so wird auch der Umkreis von $Z_\beta B X_\beta$ den Umkreis von ABC in dem Brennpunkte F der Kiepertschen Parabel schneiden.

76. Das Ähnlichkeitsverhältnis der Punktreihen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ist

$$\frac{1}{\sin(\beta-\gamma)} : \frac{1}{\sin(\gamma-\alpha)} : \frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Bew. Die Träger AC und BC der Punktreihen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ werden von 2 Tangenten in A und X_γ (Fig. 76), sowie in B und Y_γ geschnitten, daher sind BY_γ und AX_γ entsprechende Strecken der Punktreihen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Nun ist:

$$BY_\gamma = a - \frac{b}{2\cos\gamma} = \frac{r(2\sin\alpha\cos\gamma - \sin\beta)}{2\cos\gamma} = \frac{r\sin(\alpha-\gamma)}{2\cos\gamma},$$

$$AX_\gamma = b - \frac{a}{2\cos\gamma} = \frac{r(2\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha)}{2\cos\gamma} = \frac{r\sin(\beta-\gamma)}{2\cos\gamma},$$

also ist

$$BY_\gamma : AX_\gamma = \sin(\alpha-\gamma) : \sin(\beta-\gamma) = \frac{1}{\sin(\beta-\gamma)} : \frac{1}{\sin(\alpha-\gamma)}.$$

Nimmt man die Punktreihen in einer bestimmten Richtung als positiv an, etwa AB, BC, CA, so ist:

$$BY_\gamma : AX_\gamma = \frac{1}{\sin(\beta-\gamma)} : \frac{1}{\sin(\gamma-\alpha)};$$

also auch allgemein für beliebige Punkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ erhält man:

$$\mathfrak{A}' : \mathfrak{B}' : \mathfrak{C}' = \frac{1}{\sin(\beta-\gamma)} : \frac{1}{\sin(\gamma-\alpha)} : \frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$= \sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma) : \sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha) : \sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta).$$

77. Fällt man von den Ecken eines Dreiecks die Lote auf die Eulersche Gerade und bestimmt die Schnittpunkte dieser Lote mit dem Umkreise, so erhält man ein Dreieck, das zu dem ersten folgende Beziehung hat:

a) Es ist demselben kongruent;

b) es liegt kollinear mit demselben;

c) die Parallelen durch die Ecken des Dreiecks zu den entsprechenden Seiten des Grunddreiecks schneiden sich im Brennpunkt der durch das Dreieck bestimmten Kiepertschen Parabel.

Bew. (Fig. 77) Das erste ist ohne weiteres einzusehen, da das abgeleitete Dreieck, das mit UVW bezeichnet werde, das Spiegeldreieck von ABC in Bezug auf die Eulersche Gerade ist; daraus folgt auch das zweite, denn die Eulersche Gerade MH ist die Kollineationsachse der beiden Dreiecke. Zieht man nun durch U die Parallele zu BC und durch W die Parallele zu AB, so ist der Winkel, den diese Geraden bilden, β, daher liegt ihr Schnittpunkt F auf dem Kreise, der über UW geschlagen ist und den Winkel β faßt; dies ist aber der Umkreis von ABC. Es ist dann auch leicht einzusehen, daß auch die Parallele durch V zu AC durch den Punkt F geht. Sind nun X_γ und Y_γ die früher bezeichneten Punkte, d. h. die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten von BC und AC mit den Seiten AC und BC, so hat der zweite Schnittpunkt F' der Umkreise von ABC und $X_\gamma Y_\gamma C$ die Eigenschaft, daß $F'(CX_\gamma) = 180^0 - \alpha$, $F'(CA) = 180^0 - \beta$ ist. Hat H_a die alte Bedeutung und verlängert man CH_a um sich selbst bis C_a, so liegen C, W, C_a auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt H ist. Es ist dann $H(CC_a) = 2\beta$, also $W(C_aC) = 180^0 - \alpha$; da auch $W(CB) = 180^0 - \alpha$ ist, so sind die Strahlenbüschel $F'(CX_\gamma A)$ und $W(CBC_a)$ einander gleich. Ferner ist $CX_\gamma : X_\gamma A = CM_a : M_aH_a = CB : BC_a$. Daraus folgt, $CF'A \sim CWC_a$ und arc BW = arc AF' und $WF' \parallel BA$. Es kann daher F' auch erhalten werden, indem man durch W die Parallele zu BA zieht und den Schnittpunkt dieser Parallelen mit dem Umkreise bestimmt. Es ist also der Punkt F', der Schnittpunkt der Umkreise von ABC und $X_\gamma Y_\gamma C$, der vorher mit F bezeichnete Punkt.

78. Die Winkel über den Bogen, welche durch die Abstände des Brennpunktes der Kiepertschen Parabel von den Ecken des Grunddreiecks bestimmt werden, sind gleich den Winkeln, welche die Eulersche Gerade mit den betreffenden Höhen des Dreiecks bildet.

Bew. (Fig. 77). Es ist bei der alten Bezeichnung (von Nr. 77) $C_a(CW) = A(CF)$, auch $C_a(CW) = \frac{1}{2} H(CW)$. Da aber HCW gleichschenklig ist, so ist $H(MC) = \frac{1}{2} H(CW)$, daher $A(CF) = H(MC)$.

79. Die Abstände des Brennpunktes der Parabel von Kiepert von den Ecken des Grunddreiecks verhalten sich wie die Sinus der Differenz der Winkel an den andern Ecken.

Bew. Sind die zu den Bogen AF, BF, CF gehörigen Peripheriewinkel δ_1, δ_2, δ_3, so ist (Fig. 77) $AF = 2r \sin \delta_1$, $BF = 2r \sin \delta_2$, $CF = 2r \sin \delta_3$. Fällt man alsdann die Lote MA_m, MB_m, MC_m von M auf die Höhen des Dreiecks ABC, so folgt (Nr. 78)

$$MA_m = MH \sin \delta_1,\quad MB_m = MH \sin \delta_2,\quad MC_m = MH \sin \delta_3.$$

Es ist aber auch

$MA_m = r \sin(\beta-\gamma)$, $MB_m = r \sin(\alpha-\gamma)$, $MC_m = r \sin(\alpha-\beta)$, also

$$AF : BF : CF = \sin\delta_1 : \sin\delta_2 : \sin\delta_3 = MA_m : MB_m : MC_m$$
$$= \sin(\beta-\gamma) : \sin(\alpha-\gamma) : \sin(\alpha-\beta).$$

Trägt man noch dem Umstande Rechnung, daß F von B durch AC getrennt ist, so kann man auch setzen.

$$AF : BF : CF = \sin(\beta-\gamma) : \sin(\gamma-\alpha) : \sin(\alpha-\beta).$$

Man kann auch bei der Annahme für die Größe der Winkel MB_m als negativ ansehen.

Man berechnet noch leicht:

$MH^2 = r^2(1 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$; denn im Dreieck AHM ist

$$AH = 2r\cos\alpha,\quad A(MH) = \beta-\gamma,\text{ also}$$

$$MH^2 = r^2 + 4r^2\cos^2\alpha - 4r\cos\alpha\cos(\beta-\gamma) = r^2(1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$$

Daher ist $AF = 2r\sin\delta_1 = \dfrac{2r^2\sin(\beta-\gamma)}{MH}$,

$$AF = \frac{2r\sin(\beta-\gamma)}{\sqrt{1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}},\quad BF = \frac{2r\sin(\gamma-\alpha)}{\sqrt{1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}},$$

$$CF = \frac{2r\sin(\alpha-\beta)}{\sqrt{1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}.$$

Daraus folgt noch leicht:

$$FF_a : FF_b : FF_c = \frac{1}{\sin(\beta-\gamma)} : \frac{1}{\sin(\gamma-\alpha)} : \frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Zieht man nämlich FB und FC, so erhält man:

$FB \cdot FC \sin\alpha = 2r\sin\alpha \cdot FF_a$ oder mit der Zeichenberücksichtigung

$$FF_a = -\frac{FB \cdot FC}{2r} = \frac{2r\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}{1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},\text{ u. s. w.}$$

80. Die Entfernungen der Ecken des Grunddreiecks von den Spiegelpunkten in Bezug auf die Eulersche Gerade sind durch die Ausdrücke gegeben:

$$AU = \frac{4\,r\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\sqrt{1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}},\quad BV = \frac{4\,r\cos\beta\sin(\gamma-\alpha)}{\sqrt{1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}},$$

$$CW = \frac{4\,r\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)}{\sqrt{1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}.$$

Bew. Setzt man $M(AH) = \varphi_\alpha$, $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \lambda$, so folgt aus dem Dreieck MAH leicht:

$$4r^2\cos^2\alpha = r^2 + r^2(1-8\lambda) - 2r^2\sqrt{1-8\lambda}\cos\varphi_\alpha, \text{ also}$$

$$\cos\varphi_\alpha = \frac{1-2\cos^2\alpha-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sqrt{1-8\lambda}} = \frac{1-2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)}{1-8\lambda}.$$

Bei entsprechender Zeichenbestimmung giebt dies

$$\sin\varphi_\alpha = \frac{2\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\sqrt{1-8\lambda}}.$$

$$AU = 2r\sin\varphi_\alpha = \frac{4\,r\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\sqrt{1-8\lambda}}.$$

Insofern B im andern Flächenteile liegt, als A und C, können wir setzen:

$$BV = \frac{4\,r\cos\beta\sin(\gamma-\alpha)}{\sqrt{1-8\lambda}},\quad CW = \frac{4\,r\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)}{\sqrt{1-8\lambda}}.$$

81. Der Abstand des Brennpunktes der Parabel von Kiepert vom Höhenschnittpunkt ist durch die Formel gegeben:

$$FH^2 = \frac{4r^2}{1-8\lambda}\left\{8\lambda^2 + \cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma\right\}.$$

Bew. Es ist $FU \perp AH$, folglich

$$FH^2 - FA^2 = UH^2 - UA^2 \text{ oder}$$

$$FH^2 = \frac{4r^2}{1-8\lambda}\left\{\sin^2(\beta-\gamma) + \cos^2\alpha(1-8\lambda) - 4\cos^2\alpha\sin^2(\beta-\gamma)\right\}$$

$$= \frac{4r^2\Omega}{1-8\lambda}.$$

Für Ω ergiebt sich durch weitere Entwicklung:

$$\Omega = 1-3\cos^2\alpha-\cos^2(\beta-\gamma)+4\cos^2\alpha\cos^2(\beta-\gamma)-8\cos^3\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$= 1-3\cos^2\alpha-\cos^2\beta\cos^2\gamma-\sin^2\beta\sin^2\gamma-2\cos\beta\cos\gamma\sin\beta\sin\gamma$$
$$+4\cos^2\alpha(\cos^2(\beta-\gamma)-2\lambda)$$

$$= \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-4\cos^2\beta\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$+4\cos^2\alpha(\cos^2\beta\cos^2\gamma+\sin^2\beta\sin^2\gamma+2\cos\beta\cos\gamma\sin\beta\sin\gamma$$
$$-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma),$$

wobei $\sin^2\beta\sin^2\gamma = 1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+\cos^2\beta\cos^2\gamma$ gesetzt ist.

Setzt man nach $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$,

$$\sin\beta\sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma,$$

so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\Omega &= 1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 4(\cos^2\beta\cos^2\gamma + \cos^2\gamma\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\beta) + 16\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma \\ &= -1 + 2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - 4(\cos^2\beta\cos^2\gamma + \cos^2\gamma\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\beta) + 16\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma \\ &= 8\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma - (1 - 2\cos^2\alpha)(1 - 2\cos^2\beta)(1 - 2\cos^2\gamma) \\ &= 8\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma + \cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma.\end{aligned}$$

82. Der Abstand des Brennpunktes F von der Eulerschen Geraden, also der Halbparameter der Kiepertschen Parabel ist durch den Ausdruck gegeben:

$$FF_0 = \pm\frac{4r\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)}{\sqrt{1 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}^3}.$$

Bew. Setzt man $M(HF) = \psi$, so ist

$$FH^2 = r^2 + r^2(1 - 8\lambda) - 2r^2\sqrt{1 - 8\lambda}\cos\psi \quad \text{oder also}$$

$$2(8\lambda^2 + \cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma) = (1 - 4\lambda)(1 - 8\lambda) - \sqrt{1 - 8\lambda}^3\cos\psi,$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - 8\lambda}^3\cos\psi &= 1 - 12\lambda + 32\lambda^2 - 2(8\lambda^2 + \cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma) \\ &= 1 - 12\lambda - 4(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + 2 + 8(\cos^2\beta\cos^2\gamma + \cos^2\gamma\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\beta).\end{aligned}$$

Es ist nun:

$$\cos^2\beta\cos^2\gamma = \cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma + \sin^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma, \quad \text{also}$$

$$\begin{aligned}\cos^2\beta\cos^2\gamma + \cos^2\gamma\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\beta &= 3\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma \\ &+ \cos^2\beta\cos^2\gamma\sin^2\alpha + \cos^2\gamma\cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta\sin^2\gamma.\end{aligned}$$

Betrachten wir uns die 3 letzten Glieder genauer, so finden wir, daß sich die letzten aus dem ersten ergeben, wenn man die Winkel α, β, γ cyklisch vertauscht, d. h. β statt α, γ statt β, α statt γ u. s. f. vertauscht. Daher können wir zur Abkürzung setzen:

$$\cos^2\beta\cos^2\gamma\sin^2\alpha + \cos^2\gamma\cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta\sin^2\gamma = \Sigma\cos^2\beta\cos^2\gamma\sin^2\alpha;$$

und wir werden entsprechende solche Ausdrücke analog bezeichnen.

Es ist dann:

$$\begin{aligned}\Sigma\cos^2\beta\cos^2\gamma\sin^2\alpha &= (\Sigma\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha)^2 - 2\lambda\,\Sigma\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ &= \sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma - 2\lambda(1 + \lambda).\end{aligned}$$

Setzt man noch $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \mu$, so wird nun:

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - 8\lambda}^3\cos\psi &= 1 - 12\lambda - 4(1 - 2\lambda) + 2 + 8(3\lambda^2 - 2\lambda - 2\lambda^2 + \mu^2) \\ &= -1 - 20\lambda + 8\lambda^2 + 8\mu^2;\end{aligned}$$

daher:

$$(1-8\lambda)^3 \sin^2\psi = (1-8\lambda)^3 - (-1-20\lambda+8\lambda^2+8\mu^2)^2$$
$$= 16\mu^2(1+20\lambda-8\lambda^2-4\mu^2) - 64\lambda(1+\lambda)^3.$$

Mit dem Ausdruck rechts wollen wir vergleichen:

$$\sin^2(\beta-\gamma)\sin^2(\gamma-\alpha)\sin^2(\alpha-\beta),$$

wozu wir durch die Werte von AF, BF, CF geführt werden. Zu dem Ende seien einige Transformationen vorausgeschickt.

a) $\Sigma \sin^2\beta \sin^2\gamma = \frac{\mu^2}{\sin^2\omega} = \mu^2 + \mu^2\cot^2\omega = \mu^2 + (1+\lambda)^2.$

b) $-\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta) = \Sigma \sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma).$

c) $\Sigma \sin\alpha\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma) = \mu(1-8\lambda).$

d) $\Sigma \sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma = \mu^2+\lambda^2+\lambda.$

e) $\Sigma \sin^2\beta\sin^2\gamma\cos^2\beta\cos^2\gamma = \mu^4 + 2\mu^2(\lambda^2-\lambda) + \lambda^2(1+\lambda)^2.$

f) $\Sigma \sin^3\beta\sin^3\gamma\cos\beta\cos\gamma = \frac{\lambda\mu^2}{\sin^2\omega} + \mu^4 + 2\mu^2(\lambda^2-\lambda) + \lambda^2(1+\lambda)^2.$
$$= \lambda\mu^2 + \mu^4 + 2\mu^2(\lambda^2-\lambda) + \lambda(1+\lambda)^3.$$

Formel a) erhält man aus $\cot\omega = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma$, wenn man dieselbe quadriert und 1 addiert.

Formel b).

Zunächst ist:

$$\sin 2(\beta-\gamma) + \sin 2(\gamma-\alpha) + \sin 2(\alpha-\beta) = -4\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta),$$

$$\sin\beta\sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma, \text{ also}$$

$$\Sigma \sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma) = \Sigma\cos\alpha\sin(\beta-\gamma) + \Sigma\cos\beta\cos\gamma\sin(\beta-\gamma)$$
$$= \Sigma\cos\beta\cos\gamma\sin(\beta-\gamma),$$

$$\Sigma \sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma) = \tfrac{1}{2}\Sigma\cos(\beta-\gamma)\sin(\beta-\gamma) = \tfrac{1}{4}\Sigma\sin 2(\beta-\gamma)$$
$$= -\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta).$$

Formel c).

$$\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma) = \sin^3\alpha(\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha) + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos^2\alpha$$
$$= 2\sin^3\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin^3\alpha\sin\beta\sin\gamma + \mu\cos^2\alpha$$
$$= 2\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - 2\sin\alpha\cos^2\alpha\cos\beta\cos\gamma - \mu\sin^2\alpha + \mu\cos^2\alpha,$$

also

$$\Sigma \sin\alpha\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma) = 2\mu - 2\lambda\Sigma\sin\alpha\cos\alpha - \mu\Sigma\sin^2\alpha + \mu\Sigma\cos^2\alpha$$
$$= 2\mu - 4\lambda\mu - 2\mu(1+\lambda) + \mu(1-2\lambda)$$
$$= \mu(1-8\lambda).$$

Formel d).

$$\Sigma \sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma = \Sigma\sin^2\beta\sin^2\gamma - \Sigma\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$$
$$= \mu^2 + (1+\lambda)^2 - (1+\lambda) = \mu^2 + \lambda(1+\lambda).$$

Formel e).

$$\Sigma \sin^2\beta \sin^2\gamma \cos^2\beta \cos^2\gamma = (\Sigma \sin\beta \sin\gamma \cos\beta \cos\gamma)^2 - 2\lambda\mu \Sigma \sin\alpha \cos\alpha,$$
$$= (\mu^2 + \lambda^2 + \lambda)^2 - 4\lambda\mu^2.$$

Formel f).

$$\Sigma \sin^3\beta \sin^3\gamma \cos\beta \cos\gamma = \lambda \Sigma \sin^2\beta \sin^2\gamma + \Sigma \sin^2\beta \sin^2\gamma \cos^2\beta \cos^2\gamma$$
$$= \frac{\lambda\mu^2}{\sin^2\omega} + (\mu^2 + \lambda^2 + \lambda)^2 - 4\lambda\mu^2$$
$$= \lambda\mu^2 + \lambda(1+\lambda)^2 + (\mu^2 + \lambda^2 + \lambda)^2 - 4\lambda\mu^2.$$

Wir haben nun:

$$\sin^2(\beta-\gamma)\sin^2(\gamma-\alpha)\sin^2(\alpha-\beta) = (\Sigma \sin\beta \sin\gamma \sin(\beta-\gamma))^2$$
$$= \Sigma \sin^2\beta \sin^2\gamma \sin^2(\beta-\gamma) - 2\mu \Sigma \sin\alpha \sin(\alpha-\beta) \sin(\alpha-\gamma)$$
$$= \Sigma \sin^2\beta \sin^2\gamma - \Sigma \sin^2\beta \sin^2\gamma \cos^2(\beta-\gamma) - 2\mu^2(1-8\lambda)$$
$$= \mu^2(1+\cot^2\omega) - 2\mu^2(1-8\lambda) - \Sigma \sin^2\beta \sin^2\gamma \cos^2\alpha - 4\Sigma \sin^3\beta \sin^3\gamma \cos\beta \cos\gamma.$$

Da $\Sigma \sin^2\beta \sin^2\gamma \cos^2\alpha = \Sigma \sin^2\beta \sin^2\gamma - \Sigma \sin^2\beta \sin^2\gamma \sin^2\alpha$
$= \mu^2(1+\cot^2\omega) - 3\mu^2 = \mu^2\cot^2\omega - 2\mu^2$ ist,

so folgt:

$$\sin^2(\beta-\gamma)\sin^2(\gamma-\alpha)\sin^2(\alpha-\beta) = \mu^2(1+\cot^2\omega) - 2\mu^2(1-8\lambda) - \mu^2\cot^2\omega + 2\mu^2 - 4\lambda\mu^2 - 4\lambda(1+\lambda)^2 - 4(\mu^2+\lambda^2+\lambda)^2 + 16\lambda\mu^2$$
$$= \mu^2(1 + 20\lambda - 8\lambda^2 - 4\mu^2) - 4\lambda(1+\lambda)^2 - 4\lambda^2(1+\lambda)^2$$
$$= \mu^2(1 + 20\lambda - 8\lambda^2 - 4\mu^2) - 4\lambda(1+\lambda)^3.$$

Somit finden wir:

$$(1-8\lambda)^3 \sin^2\psi = 16 \sin^2(\beta-\gamma) \sin^2(\gamma-\alpha) \sin^2(\alpha-\beta), \text{ also}$$

$$\sin\psi = \pm \frac{4 \sin(\beta-\gamma) \sin(\gamma-\alpha) \sin(\alpha-\beta)}{\sqrt{1-8\lambda^3}}.$$

Der gesuchte Abstand, welcher zugleich der Halbparameter p der Kiepertschen Parabel ist, ist nun $r \sin\psi$, daher

$$p = \pm \frac{4r \sin(\beta-\gamma) \sin(\gamma-\alpha) \sin(\alpha-\beta)}{\sqrt{1-8\lambda^3}}.$$

Durch Einführung der Werte AF, BF, CF oder FF_a u. s. w. ergiebt sich auch

$$p = \frac{AF \cdot BF \cdot CF}{2r^2} = \sqrt{\frac{-2 FF_a \cdot FF_b \cdot FF_c}{r}}.$$

B. Die Hyperbel Γ von Kiepert.

83. In Nr. 60 Anh. ist der Begriff der isogonalen Verwandtschaft erörtert und gezeigt, daß einer beliebigen Geraden durch isogonale Verwandtschaft ein Kegelschnitt durch die Ecken des Grunddreiecks entspricht. Dem Brocardschen Durchmesser wird daher ebenfalls ein Kegelschnitt entsprechen, der eine gleichseitige Hyperbel sein muß, da der Durchmesser durch den Mittelpunkt des Umkreises geht. Sie heißt die Kiepertsche Hyperbel und ist von Brocard als die Hyperbel Γ bezeichnet. Dieselbe geht nach dem, was eben gesagt ist, durch die Winkelgegenpunkte der Punkte des Brocardschen Durchmessers. Indem wir für diese Punkte, sowie die das Gebilde bestimmenden Punkte die Bezeichnung Nr. 1 u. ff. Anh. zu Grunde legen, können wir also folgende Aussagen machen. Die Kiepertsche Hyperbel geht durch das Kollineationscentrum S des Grunddreiecks mit dem ersten Brocardschen; durch den Schnittpunkt J der Verbindungslinien der Ecken mit den Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke, bei denen der Winkel an der Grundlinie ω ist, durch die Schnittpunkte der Verbindungslinien der Ecken mit den Spitzen der gleichseitigen Dreiecke, die über den Seiten des Grunddreiecks und zwar nach innen und außen errichtet werden; sie geht auch durch den Schwerpunkt G und durch Punkt N von Tarry.

Es entspricht nämlich dem Punkte S als Winkelgegenpunkt der Pol T der Brocardschen Linie L'L'' in Bezug auf den Brocardschen Kreis, ebenso entspricht J dem Mittelpunkt E von L'L'', G dem Punkt L von Lemoine, den Schnittpunkten der Verbindungslinien der Ecken mit den Spitzen der gleichseitigen Dreiecke die isodynamischen Centra. Es entspricht endlich dem Punkte von Tarry der Punkt in der Unendlichkeit auf dem Brocardschen Durchmesser. Verbindet man nämlich A mit N, so findet man, weil N und M im Grunddreieck und im Brocardschen Dreieck entsprechende Punkte sind, daß $A(BN) = L(B'M)$; es ist ferner $LB' \parallel AC$, also ist die Gegentransversale von AN parallel zu ML, daher der Winkelgegenpunkt von N der Punkt in der Unendlichkeit von ML.

84. Zweite Erzeugung der Kiepertschen Hyperbel.

Man denke sich die ähnlichen Punktreihen y und z auf den Mittelsenkrechten von AC und AB und verbinde entprechende Punkte Y und Z derselben bez. mit B und C, dann bestimmen die Schnittpunkte dieser Strahlbüschel die Kiepertsche Hyperbel. — Zunächst folgt, daß diese Strahlbüschel projektivisch sind, so daß dieselben, weil sie nicht kollinear

liegen, einen Kegelschnitt erzeugen. Die Strahlen BH und CH (H der Höhenschnittpunkt) entsprechen sich, denn sie gehen durch die Unendlichkeitspunkte von y und z, daher geht der durch die Strahlbüschel erzeugte Kegelschnitt durch H. Da sich BY_0 und CZ_0 ebenso entsprechen, wo Y_0 und Z_0 die Mittelpunkte von AC und AB sind, so geht der Kegelschnitt auch durch den Schwerpunkt G. Ebenso ist leicht einzusehen, daß er durch A geht, der hierdurch erzeugte Kegelschnitt geht also durch 5 Punkte, durch welche die isogonale Kurve des Brocardschen Durchmessers geht; daher sind die angegebenen Kurven identisch.

Wir können hiernach folgenden Satz aussprechen.

Die Kollineationscentra des Grunddreiecks mit den durch die Punkte ähnlicher Punktreihen auf den Mittelsenkrechten bestimmten Dreiecke XYZ bilden die Kiepertsche Hyperbel.

Ist dabei φ der Winkel an der Grundlinie der ähnlichen Dreiecke, deren Spitzen die Ecken des Dreiecks XYZ geben, so ergiebt sich nach dem Beweise von Nr. 11 Anh., daß die Abstandsverhältnisse des Kollineationscentrums der Dreiecke ABC und XYZ sind:

$$\frac{1}{\sin(\alpha+\varphi)} : \frac{1}{\sin(\beta+\varphi)} : \frac{1}{\sin(\gamma+\varphi)}.$$

Umgekehrt also werden alle Punkte, welche von den Seiten dieses Dreiecks diese Abstandsverhältnisse haben, auf der Kiepertschen Hyperbel liegen.

Für den Schwerpunkt G ist $\varphi = 0$, in der That ist

$$GG_a : GG_b : GG_c = \frac{1}{\sin\alpha} : \frac{1}{\sin\beta} : \frac{1}{\sin\gamma}.$$

Für den Punkt S haben wir:

$$SS_a : SS_b : SS_c = \frac{1}{\sin(\alpha-\omega)} : \frac{1}{\sin(\beta-\omega)} : \frac{1}{\sin(\gamma-\omega)},$$

entsprechend dem Umstande, daß hier der Winkel ω nach innen angetragen werden muß.

Für die Winkelgegenpunkte D, D' der isodynamischen Centra haben wir

$$DD_a : DD_b : DD_c = \frac{1}{\sin(\alpha+60^0)} : \frac{1}{\sin(\beta+60^0)} : \frac{1}{\sin(\gamma+60^0)}.$$

$$D'D'_a : D'D'_b : D'D'_c = \frac{1}{\sin(\alpha-60^0)} : \frac{1}{\sin(\beta-60^0)} : \frac{1}{\sin(\gamma-60^0)}.$$

Die Abstände des Mittelpunktes K des Brocardschen Kreises von den Seiten sind $\frac{r\cos(\alpha-\omega)}{2\cos\omega}$, $\frac{r\cos(\beta-\omega)}{2\cos\omega}$, $\frac{r\cos(\gamma-\omega)}{2\cos\omega}$; daher sind die Abstandsverhältnisse des Winkelgegenpunktes Q von den Seiten:

$$\frac{1}{\cos(\alpha-\omega)} : \frac{1}{\cos(\beta-\omega)} : \frac{1}{\cos(\gamma-\omega)} = \frac{1}{\sin(\alpha+90^0-\omega)} : \frac{1}{\sin(\beta+90^0-\omega)} : \frac{1}{\sin(\gamma+90^0-\omega)}.$$

Der Punkt wird also erhalten, wenn man über den Seiten des Grunddreiecks gleichschenklige Dreiecke zeichnet, deren Basiswinkel $90^0-\omega$ ist. — Dem Winkel ω entspricht J als Winkelgegenpunkt von E, dem Mittelpunkte von L'L'', d. h. dem Abstande der Brocardschen Punkte. Dem Winkel $\omega - 90^0$ entspricht endlich der Punkt N. Die Abstandsverhältnisse sind dem entsprechend:

$$\frac{1}{\sin(\alpha+\omega-90^0)} : \frac{1}{\sin(\beta+\omega-90^0)} : \frac{1}{\sin(\gamma+\omega-90^0)} = \frac{1}{\cos(\alpha+\omega)} : \frac{1}{\cos(\beta+\omega)} : \frac{1}{\cos(\gamma+\omega)},$$

wie es in Nr. 20 Anh. nachgewiesen ist.

Für den Winkelgegenpunkt Ω von N haben wir daher die Abstandsverhältnisse $\cos(\alpha+\omega) : \cos(\beta+\omega) : \cos(\gamma+\omega)$.

Da $\Sigma \sin\alpha \cos(\alpha+\omega) = 0$ ist, so bedeutet dies, daß der Punkt in der Unendlichkeit ist.

85. Der Mittelpunkt der Kiepertschen Hyperbel ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen dem Höhenschnittpunkt und dem Punkte von Tarry.

Bew. Denken wir uns N und H (Fig. 78) als die Endpunkte eines Durchmessers einer gleichseitigen Hyperbel, dann wird dieselbe durch einen dritten Punkt bestimmt. Dieser Punkt sei A. Da nun $N(BA) = 180^0 - \gamma = H(AB)$ und $N(CA) = \beta = 180^0 - H(CA)$ ist, so liegen B und C (Milinowski: die gleichseitige Hyperbel § 1. 8) auf dieser Hyperbel. Zieht man nun $TH'' \parallel AH$, wo H'' der Schnittpunkt der Parallelen mit AN ist, dann ist AH''TM ein Kreisviereck. Es ist nämlich $(BC, B'C') = M(AL)$ nach Nr. 72 Anh.; ferner $TH'' \perp BC$, $H''N \perp B'C'$, also $H''(NT) = (BC, B'C') = M(AL)$ oder $H''(AT) + M(AT) = 180^0$.

Da nun $TM \parallel HS$ und $TH'' \parallel AH$ ist, so ist $T(H''M) = H(AS)$,

also $A(H''M) + H(AS) = 180^0$, somit auch

$$N(AS) + H(AS) = 180^0.$$

Demnach liegt auch S auf der eben bestimmten Hyperbel, die nun keine andere als die Kiepertsche Hyperbel sein kann.

86. Die Simsonschen Geraden der Endpunkte eines Durchmessers sind die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel, welche durch die Ecken des Dreiecks geht.

Bew. Es sei ABC (Fig. 79) ein beliebiges Dreieck, DE ein Durchmesser des Umkreises mit dem Mittelpunkt M. Denken wir uns den Durchmesser DE als eine Gerade, zu der die isogonale Kurve gesucht werden soll, so entsprechen den Punkten D und E Punkte in der Unendlichkeit, sie geben uns also die Richtungen der Asymptoten der betreffenden Hyperbel. Da nun die Simsonschen Geraden der Punkte D und E senkrecht zu den Richtungen sind, welche als Gegenpunkte zu den Punkten D und E gelten, so ist klar, daß die Simsonschen Geraden der Punkte D und E den Asymptoten der Hyperbel parallel sind. Die Lote von D auf BC und AC mögen diese Geraden in J und U treffen, dann ist JU die Simsonsche Gerade von D. Verlängern wir DJ bis zum Umkreise in K, so ist AK ∥ JU; das Lot von B auf AK treffe diese Gerade in L, dann ist die Gerade JL parallel AC; denn da BL ⊥ AK, BJ ⊥ DK, so ist LK die Simsonsche Gerade von B in Bezug auf AKD und AC die Parallele dazu. Eine Hyperbel ist durch ABC und die Bedingung, daß JU Asymptote sein soll, bestimmt. Mittelst des Pascalschen Satzes läßt sich dann bestimmen, in welchem Punkte die Gerade BL die Hyperbel zum zweiten Male trifft. Die Ecken 1 und 2 eines Sechsecks der Hyperbel mögen mit dem Unendlichkeitspunkte von JU zusammenfallen, A sei die Ecke 3, C die Ecke 4, B die Ecke 5, der zweite Schnittpunkt auf BL die Ecke 6. Es ist dann J der Punkt (12−45), L der Punkt (23—56), endlich (34−61) ein Punkt auf AC; da aber JL ∥ AC ist, so ist dieser Punkt in der Unendlichkeit; dann aber muß auch 6 in der Unendlichkeit angenommen werden; deshalb muß die zweite Asymptotenrichtung parallel BL sein, d. h. parallel der Simsonschen Geraden durch E. Die beiden Asymptoten müssen sich nun auf dem Feuerbachschen Kreise schneiden, da derselbe der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln durch die Ecken des Dreiecks ist. Da die Simsonsche Gerade durch E die dem Punkte D entsprechende Simsonsche Gerade auf dem Feuerbachschen Kreise schneidet, so ist also auch die Simsonsche Gerade zu E eine Asymptote der DE entsprechenden Hyperbel.

87. Die Geraden, auf denen die Spitzen ähnlicher gleichschenkliger Dreiecke über den Seiten liegen, sind gemeinsame Tangenten der Parabeln von Artzt, welche durch die ähnlichen Punktreihen auf den Mittelsenkrechten der Seiten erzeugt werden. Dieselben sind zugleich die Halbierungslinien der Winkel, welche durch die Verbindungslinien des Schwerpunkts mit einer Ecke des Grunddreiecks und mit der entsprechenden des ersten Brocardschen Dreiecks gebildet werden.

Bew. Da die Geraden entsprechende Punkte der Punktreihen auf den Mittelsenkrechten verbinden, so sind sie Tangenten der angegebenen Parabeln. Die Winkel an der Basis der zugehörigen gleichschenkligen Dreiecke sind durch die Gleichung $\sin(2\varphi + \omega) = 2\sin\omega$ bestimmt. Aus derselben folgt:

$$\cot^2\varphi + 2\cot\omega\cot\varphi + 3 = 0.$$

Sind $\cot\mu$ und $\cot\nu$ die Wurzeln dieser Gleichung, so ergiebt sich leicht $\cot\mu + \cot\nu = 2\cot\omega$.

Bezeichnen wir nun mit X_μ und X_ν die Spitzen der entsprechenden gleichschenkligen Dreiecke über BC, so folgt aus der letzten Gleichung, daß X_0A' durch $X_\mu X_\nu$ harmonisch geteilt wird, wo X_0 und A' die bekannte Bedeutung haben.

Man erhält daher am Schwerpunkt das harmonische Strahlenbüschel $G(X_0A'X_\mu X_\nu)$. Da nun $G(X_\mu X_\nu) = 90^0$ ist, so müssen GX_μ und GX_ν die Winkel der Strahlen GX_0 und GA' oder GA und GA' halbieren.

Bem. Da das Dreieck ABC seinem ersten Brocardschen Dreieck A'B'C' ähnlich ist, aber gegenwendig liegt, so müssen entsprechende Gerade Winkel bilden, deren Halbierungslinien parallel sind. Es entsprechen sich GA und GA', GB und GB', GC nnd GC', daher müssen die Halbierungslinien der Winkel G(AA'), G(BB'), G(CC') dieselben sein. Ihnen müssen parallel sein die Halbierungslinien der Winkel (BC, B'C'), (CA, C'A'), (AB, A'B').

88. Die Asymptoten der Kiepertschen Hyperbel sind den gemeinsamen Tangenten der Parabeln von Arzt, welche durch die ähnlichen Punktreihen auf den Mittelsenkrechten der Seiten erzeugt werden, parallel.

Der Beweis folgt leicht aus dem Beweise des Satzes Nr. 51. Anh. Hier ist nachgewiesen, daß diese Tangenten parallel den Simsonschen Geraden der Punkte des Umkreises sind, in welchem derselbe vom Brocardschen Durchmesser geschnitten wird. Nach Nr. 86 Anh. sind aber diese Simsonschen Geraden die Asymptoten der Kiepertschen Hyperbel.

89. Die Verbindungslinien des Punktes von Tarry mit den Schnittpunkten des Brocardschen Durchmessers und des Umkreises sind den Asymptoten der Kiepertschen Hyperbel parallel.

Bew. Es seien Ω' und Ω'' (Fig. 70) die Schnittpunkte des Brocardschen Durchmessers mit dem Umkreise und Ω_a' u. s. w. die Fußpunkte der Lote auf die Seiten, also $\Omega_a'\Omega_b'\Omega_c'$ oder f die Simsonsche Gerade von Ω'. Nun wird HΩ' durch f halbiert, ebenso HN, da jeder Durchmesser einer Hyperbel durch eine Asymptote halbiert wird, es muß also

$N\Omega' \parallel f$ sein. Natürlich ist $N\Omega''$ der Simsonschen Geraden von Ω'' parallel.

190. Die Winkel, welche die Seiten des Brocardschen Dreiecks mit den entsprechenden des Grunddreiecks bilden, sind durch die Formeln gegeben:

$$\sin\varphi_\alpha = \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\omega}{\sqrt{1-4\sin^2\omega}},$$

$$\sin\varphi_\beta = \frac{\sin(\gamma-\alpha)\cdot\sin\omega}{\sin\beta\cdot\sqrt{1-4\sin^2\omega}},$$

$$\sin\varphi_\gamma = \frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin\omega}{\sin\gamma\cdot\sqrt{1-4\sin^2\omega}}.$$

Bew. Halten wir die alte Bezeichnung fest, sind also A',B',C' die Ecken des ersten Brocardschen Dreiecks, so ergiebt sich

$B'B'_a : B'B'_b = \sin(\gamma-\omega) : \sin\omega$
$B'B'_b : B'B'_c = \sin\omega : \sin(\alpha-\omega)$, also
$B'B_a' : B'B'_b : B'B'_c = \sin(\gamma-\omega) : \sin\omega : \sin(\alpha-\omega) =$
$\sin^3\gamma : \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma : \sin^3\alpha.$

Wir können daher setzen:

$$B'B'_a = \lambda\sin^3\gamma,\ B'B'_b = \lambda\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,\ B'B'_c = \lambda\sin^3\alpha.$$

Dies giebt:

$$\lambda(\sin\alpha\sin^3\gamma + \sin\alpha\sin^2\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin^3\alpha) = 2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

oder $\lambda\sin\alpha\sin\gamma(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma) = 2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$

$$\text{oder } \lambda = \frac{r\,\mathrm{tg}\,\omega}{\sin\alpha\sin\gamma}, \text{ also}$$

$$B'B'_a = \frac{r\,\mathrm{tg}\,\omega\sin^2\gamma}{\sin\alpha},\ \text{ebenso } C'C'_a = \frac{r\,\mathrm{tg}\,\omega\sin^2\beta}{\sin\alpha},$$

$$\text{also } C'C'_a - B'B'_a = \frac{r\,\mathrm{tg}\,\omega(\sin^2\beta-\sin^2\gamma)}{\sin\alpha} = r\,\mathrm{tg}\,\omega\sin(\beta-\gamma).$$

Ferner ist $B'C' = r\sin\alpha\sqrt{1-3\,\mathrm{tg}^2\omega}$, also

$$\sin\varphi_\alpha = \frac{C'C'_a - B'B'_\alpha}{B'C'} = \frac{\mathrm{tg}\,\omega\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha\sqrt{1-3\,\mathrm{tg}^2\omega}} = \frac{\sin(\beta-\gamma)\sin\omega}{\sin\alpha\sqrt{1-4\sin^2\omega}}.$$

Es ist noch $\sqrt{1-4\sin^2\omega} = \sqrt{\frac{\cos 3\omega}{\cos\omega}} = \sin(\mu-\nu)$ (Nr. 87),

daher auch $\sin\varphi_\alpha = \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha} : \frac{\sin(\mu-\nu)}{\sin\omega}.$

91. Die isogonale Kurve der Geraden von Lemoine ist die Ellipse, die durch die Ecken des Dreiecks geht und den Schwerpunkt des Dreiecks zum Mittelpunkt hat.

Bew. Zum Beweise benutzen wir die Eigenschaften der Symmedianen, wie sie in Nr. 105 ff. angegeben sind. Es sei also (Fig. 80) ABC das Dreieck; die Tangenten an den Umkreis mögen die Gegenseiten in X, Y, Z treffen, die Pole der Seiten seien aber U, V, W; ferner mögen die Symmedianen den Umkreis in A', B', C' treffen, die Gerade von Lemoine in U', V', W', so daß X, Y, Z, U', V', W' auf derselben Geraden liegen, die wir der Kürze halber mit l bezeichnen wollen, deren Pol L ist. Die Mittelpunkte der Seiten seien endlich X_0, Y_0, Z_0. Nach den angegebenen Sätzen liegen BC'U', CB'U' u. s. f. in einer Geraden; ebenso UBWY u. s. f. Die Symmediane bei A möge den Winkel α in α_1 und α_2 teilen, ebenso die Symmediane bei B den Winkel β in β_1 und β_2 und die Symmediane bei C den Wintel γ in γ_1 und γ_2, so daß auch $A(CX_0) = \alpha_1 = A(LB)$, $A(X_0B) = \alpha_2 = A(LC)$ u. s. w. ist. Man ziehe nun AX_0 und verlängere diese Länge um $\frac{AX_0}{3}$ bis A'', dann ist $BA'' \parallel CZ_0$, also $B(A''C) = C(BZ_0) = \gamma_2 = B(AC')$ ist, da aber BC'U' in einer Geraden liegen, so sind BA'' und BU' Gegentransversalen; ebenso CA'' und CU', also sind A'' und U' Winkelgegenpunkte. Bestimmt man B'' und C'' analog A'', so sind auch B'' und C'' Winkelgegenpunkte von V' und W', also gehören A'', B'', C'' der zu l gehörigen isogonalen Kurve an. Da dieselbe durch A und A'', B und B'', C und C'' geht, und der Schwerpunkt G des Dreiecks ABC der Mittelpunkt von AA'', BB'', CC'' ist, so ist die angegebene Ellipse in der That die isogonale Kurve zu l. Sie wird als Ellipse von Steiner bezeichnet.

92. Der gemeinschaftliche Punkt zwischen der Ellipse von Steiner und dem Umkreise ist der Gegenpunkt des Punktes von Tarry auf dem Umkreise. Derselbe wird als Punkt von Steiner bezeichnet.

Bew. Der Steinerschen Ellipse entspricht durch isogonale Verwandtschaft die Gerade l von Lemoine, dem Umkreise die Gerade in der Unendlichkeit. Um also den Schnittpunkt der Steinerschen Ellipse mit dem Umkreise zu bestimmen, dürfen wir nur den Winkelgegenpunkt des Unendlichkeitspunktes der Geraden l suchen. Es ist nun l senkrecht zum Brocardschen Durchmesser ML (Fig. 70). Fällen wir daher von A das Lot ML und ziehen die Gegentransversale, so schneidet diese den Umkreis in dem gemeinschaftlichen Punkte R oder umgekehrt, verbinden wir den zweiten Endpunkt R des Durchmessers durch N mit A und

fällen von A das Lot auf ML, so ist nur zu zeigen, daß diese beiden Geraden Gegentransversalen sind. Nun ist AR ∥ B'C', also (AR, BC) = (BC, B'C') = M(AL) = φ_α. Trifft also das Lot von A auf ML den Kreis in R', so ist auch arc (AR') = φ_α; da A(RC) = $\gamma - \varphi_\alpha$ ist, so auch A(BR') = $\gamma - \varphi_\alpha$, daher AR' und AR Gegentransversalen.

93. Die Achsen der Ellipse von Steiner sind die gemeinschaftlichen Tangenten der durch die ähnlichen Punktreihen auf den Mittelsenkrechten erzeugten Parabeln von Artzt.

Bew. Da ABCR die Punkte sind, in welchen der Umkreis die Ellipse von Steiner schneidet, so erhält man die Richtungen der Achsen, wenn man die Winkel halbiert, welche 2 gemeinschaftliche Sehnen bilden, von denen jede durch 2 andere Punkte geht; man darf also nur die Winkel der Geraden AR und BC halbieren. Da aber (AR, BC) = (B'C', BC) ist, so kann man statt dessen auch den Winkel (BC, B'C') und dessen Nebenwinkel halbieren. Die Halbierungslinien dieser Winkel sind aber (Nr. 87 u. 88 Anh.) den gemeinschaftlichen Tangenten der Parabeln von Artzt parallel. Da diese durch den Schwerpunkt, also durch den Mittelpunkt der Ellipse von Steiner gehen, so sind es die Achsen selbst.

94. Die Punkte der Kiepertschen Hyperbel, bei denen die Abstandsverhältnisse $-\frac{1}{\sin(\alpha+\varphi)} : \frac{1}{\sin(\beta+\varphi)} : \frac{1}{\sin(\gamma+\varphi)}$ sich durch das Zeichen des Winkels φ unterscheiden, liegen zum Höhenschnittpunkt und Schwerpunkt harmonisch; d. h. verbindet man einen beliebigen Punkt der Hyperbel mit den angegebenen 4 Punkten, so erhält man ein harmonisches Strahlenbüschel.

Bew. Sind X und X' die Spitzen zweier gleichschenkligen Dreiecke mit dem Winkel φ an der Grundlinie, so geht AX durch den einen Punkt, den wir mit D bezeichnen, und AX' durch den andern Punkt D' der Kiepertschen Hyperbel von der verlangten Eigenschaft. Ist nun X_0 der Mittelpunkt von BC und X_∞ der Unendlichkeitspunkt der Mittelsenkrechten, so ist ($X_0X_\infty XX'$) harmonisch, also auch A(GHDD'), da diese Strahlen durch jene Punkte gehen.

Bem. Als solche Punkte sind zu bezeichnen (Fig. 70) S und J, die Winkelgegenpunkte der isodynamischen Centra, ferner N und Q, wo Q der Winkelgegenpunkt des Mittelpunkts K vom Brocardschen Kreise ist. Da nämlich die Abstandsverhältnisse von K sind:

cos ($\alpha - \omega$) : cos ($\beta - \omega$) : cos ($\gamma - \omega$), so sind die von Q:

$$\frac{1}{\cos(\alpha-\omega)} : \frac{1}{\cos(\beta-\omega)} : \frac{1}{\cos(\gamma-\omega)} = \frac{1}{\sin(\alpha+90^0-\omega)} : \frac{1}{\sin(\beta+90^0-\omega)} : \frac{1}{\sin(\gamma+90^0-\omega)};$$

die von N dagegen:

$$\frac{1}{\sin(\alpha+\omega-90^0)} : \frac{1}{\sin(\beta+\omega-90^0)} : \frac{1}{\sin(\gamma+\omega-90^0)} = \frac{1}{\cos(\alpha+\omega)} : \frac{1}{\cos(\beta+\omega)} : \frac{1}{\cos(\gamma+\omega)}.$$

95. Ist F der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises, so liegen N, J, F in einer Geraden.

Bew. (Fig. 70). A(A'$A_\omega M_a$H) oder A(SJGH) harmonisch, also auch N(SJGH), ebenso N(MFGH), da (MFGH) harmonisch ist. Da NM die Gerade NS ist, so auch NF die Gerade NJ, d. h. N, J, F liegen in einer Geraden.

96. GQ ∥ SH.

Bew. Man teile HE in Q' so, daß HQ' : Q'E = 2 : 1 ist. Es ist nun $HH_a = 2r\cos\beta\cos\gamma$, $EE_a = r\sin\omega\sin(\alpha+\omega)$ (Nr. 13 Anh.), folglich

$$\begin{aligned} Q'Q'_a &= \tfrac{2}{3} r\cos\beta\cos\gamma + \tfrac{2}{3} r\sin\omega\sin(\alpha+\omega) \\ &= \tfrac{1}{3} r\{\cos(\beta-\gamma) - \cos\alpha + \cos\alpha - \cos(\alpha+2\omega)\} \\ &= \tfrac{2}{3} r\cos(\beta-\omega)\cos(\gamma-\omega). \end{aligned}$$

Da $KK_a = \frac{r}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\omega) = \frac{r\cos(\alpha-\omega)}{\cos\omega}$ ist, so ergiebt sich, daß K und Q' Winkelgegenpunkte sind oder aber Q' ist der Punkt Q. Da nun HE in Q und HM in G nach dem Verhältnisse 2:1 geteilt wird, so ist GQ ∥ ME ∥ SH.

97. G, K, N liegen in einer Geraden.

Bew. GK und GM sind entsprechend liegende Gerade der ähnlichen Dreiecke A'B'C' und ABC, ebenso aber GM und GN, da N die Lage zu ABC hat, wie M zu A'B'C'. Es muß also G(KM) = G(MN) sein; da nun die Dreiecke gegenwendig liegen, so muß GK der Lage nach GN sein, oder G, K, N liegen in einer Geraden.

98. LG und LH sind Tangenten der Kiepertschen Hyperbel.

Bew. G(GHNQ) ist ein harmonisches Büschel, wobei GG natürlich die Richtung der Tangente in G angiebt, oder auch G(GMNQ) harmonisch. Ferner ist G(LMKQ) harmonisch, da ML durch K halbiert ist und GQ ∥ LM (Nr. 96 Anh.) ist. Da GK die Gerade GN ist, so muß GG die Gerade GL sein, d. h. GL ist Tangente.

Es sei ferner W der Mittelpunkt von NH, also auch der Kiepertschen Hyperbel. Man halbiere nun GH in M_0, dann ist $LM_0 \parallel GK$ oder $LM_0 \parallel NG$. Nun ist $HM_0 = M_0G$, $HW = WN$, also ist $WM_0 \parallel NG$, daher geht M_0L durch W. Verbindet man nun den Mittelpunkt einer Sehne eines Kegelschnitts mit dem Mittelpunkt desselben, so geht die Verbindungslinie durch den Pol der Sehne, also M_0W geht durch den Pol von GH; ebenso muß GL durch den Pol gehen; da sich die Linien in L schneiden, so ist L der Pol von GH.

99. H, J, K liegen in einer Geraden.

Bew. H(HGJS) ist harmonisch, ebenso H(LMKS), es ist aber HH der Strahl HL und HG der Strahl HM, also muß HJ mit HK zusammenfallen.

100. Q, F, S liegen in einer Geraden.

Bew. $QG = \frac{2}{3}$ EM, auch QG ∥ EM, $EM = \frac{1}{2}$ SH, also $QG = \frac{1}{3}$ SH. Da QG ∥ SH ist, so müssen sich QS und GH in dem Verhältnis 1 : 3 schneiden. GH wird in F nach dem Verhältnis 1 : 3 geteilt, also auch QS, welches somit durch F geht.

101. M, J, Q liegen in einer Geraden.

Bew. Q(HGJS) ist harmonisch, ebenso Q(HGMF); da nun QS und QF zusammenfallen, so auch QJ und QM.

102. G, J, T liegen in einer Geraden.

Bew. Es sei F′ der Schnittpunkt von ML mit NF; es ist dann J(F′MTK) harmonisch; denn N(F′MTK) = N(FMHG) harmonisch; ebenso J(NQGH) harmonisch. Nun ist JF′ mit JN, JM mit JQ, JH mit JK identisch, also auch JT mit JG.

103. Es schneiden sich MH, ST, EJ in einem Punkte P.

Bew. MH und ST mögen sich in P schneiden; wir erhalten dann das vollständige Vierseit der Seiten PGM, MEF, SGE, PST mit den Ecken P, G, M, E, S, T. Es sei N′ der Schnittpunkt von TG mit NM, dann ist N(N′JGT) harmonisch, denn N(MFGH) ist harmonisch und diese Strahlen sind identisch mit den Strahlen von N(N′JGT), also auch M(N′JGT) oder M(SJGT), daher muß MJ eine Diagonale des angegebenen vollständigen Vierseits sein; eine Diagonale ist TG, welche durch J geht, es muß daher J einer der Schnittpunkte der Diagonalen des Vierseits sein; es muß also EP durch J oder EJ durch P gehen.

104. Die Punkte E, J, P, R liegen in einer Geraden harmonisch.

Bew. Man berechnet leicht $MT = \frac{r \cos^2\omega \sqrt{1 - 3\,tg^2\omega}}{\cos 2\omega}$,

$ET = \frac{2\,r \sin^2\omega \cos^2\omega \sqrt{1 - 3\,tg^2\omega}}{\cos 2\omega}$, also $\frac{MT}{ET} = \frac{1}{2 \sin^2\omega}$.

Lassen wir nun Dreieck MSE durch TG schneiden, so wird ME in T, SE in G, MS in N′ (Nr. 103 Anh.) geschnitten; es ist also

$\frac{MT}{ET} \cdot \frac{EG}{GS} \cdot \frac{SN'}{N'M} = 1$, also da $\frac{EG}{GS} = \frac{1}{2}$ ist,

$\frac{SN'}{N'M} = 4 \sin^2\omega$.

Man erhält ferner $MR : SR = 1 : 1 - \frac{\cos 3\,\omega}{\cos \omega} = \cos\omega : 2 \sin\omega \cdot \sin 2\,\omega$

$= 1 : 4 \sin^2\omega$.

Daher wird MS durch N′R harmonisch geteilt. Nun sind MS, EP, TG die Diagonalen in dem vollständigen Vierseit mit den Ecken P, G, M, E, S, T; daher muß die Diagonale EP durch R gehen und EP durch JR harmonisch geteilt werden.

105. R, G, W liegen in einer Geraden.

Bew. Im Dreieck HNR ist HM Schwerlinie und da HM in G nach dem Verhältnis 2 : 1 geteilt wird, so ist G Schwerpunkt. Da nun RW Schwerlinie im Dreieck HNR ist, so liegen R, G, W in einer Geraden.

106. Trifft der parallel dem Brocardschen Durchmesser gelegte Durchmesser des Feuerbachschen Kreises diesen Kreis in Q′ und Q″, so sind die Verbindungslinien dieser Punkte mit dem Mittelpunkt der Kiepertschen Hyperbel die Asymptoten derselben.

Bew. H ist der äußere Ähnlichkeitspunkt vom Umkreis und Feuerbachschen Kreis, daher entsprechen sich die Punkte Q′ und Ω′, sowie Q″ und Ω″, wo Ω′ die Schnittpunkte von ML mit dem Umkreise sind; also muß HΩ′ in Q′ halbiert werden, ebenso HΩ″ in Q″. Nun ist W der Mittelpunkt von HN, also NΩ′ ∥ WQ′; da NΩ′ einer Asymptote der Kiepertschen Hyperbel parallel ist und W der Mittelpunkt der Hyperbel ist, so ist WQ′ die Asymptote selbst.

107. Legt man durch den Mittelpunkt des Umkreises eine Sekante, welche die Kiepertsche Hyperbel in den Punkten D und Δ schneidet, so werden die Verbindungslinien der Ecken des Grunddreiecks mit den Hyperbelpunkten D und Δ auf den Mittelsenkrechten Punkte bestimmen,

welche die Spitzen ähnlicher gleichschenkliger Dreiecke sind. Diese Spitzen geben dann 2 Dreiecke, die mit dem Grunddreieck kollinear, auch untereinander kollinear sind und zwar haben je 2 dieselbe Kollineationsachse.

Bew. Der erste Teil des Satzes ergiebt sich sofort aus der zweiten Entstehung der Kiepertschen Hyperbel. Es seien nun (Fig. 81) X, Y, Z Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke, die durch D bestimmt werden und ξ, η, ζ die Spitzen des zweiten Systems, so daß sich AX, BY, CZ in D, $A\xi$, $B\eta$, $C\zeta$ in Δ schneiden; ferner mögen sich BC und YZ in $\mathfrak{A}$, CA und ZX in $\mathfrak{B}$, AB und XY in $\mathfrak{C}$ schneiden. Betrachten wir nun die Dreiecke $BY\eta$ und $CZ\zeta$, so finden wir leicht, daß sie kollinear sind; es schneiden sich nämlich $Y\eta$ und $Z\zeta$ im Mittelpunkt M des Umkreises, BY und CZ in D, $B\eta$ und $C\zeta$ in Δ, so daß $MD\Delta$ die Kollineationsaxe ist. Daher müssen sich auch BC, YZ und $\eta\zeta$ in einem Punkte schneiden, d. h. in $\mathfrak{A}$; ebenso schneiden sich natürlich CA, ZX, $\zeta\xi$ in $\mathfrak{B}$, AB, XY, $\xi\eta$ in $\mathfrak{C}$.

108. Wenn man über den Seiten eines Dreiecks 2 Systeme ähnlicher gleichschenkliger Dreiecke konstruiert, so daß die entsprechenden Winkel an der Grundlinie in den Systemen sich zu 90^0 ergänzen, so schneiden sich die Verbindungslinien der Ecken des Grunddreiecks mit den entsprechenden Spitzen der beiden Systeme in 2 Punkten der Kiepertschen Hyperbel, die mit dem Mittelpunkt des Umkreises vom Grunddreieck in einer Geraden liegen.

Bew. Die Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke über den Seiten, welche bez. den Winkeln φ und $90^0 - \varphi$ entsprechen, seien X, Y, Z und X″, Y″, Z″; wenn sich dann AX, BY, CZ in D, AX″, BY″, CZ″ in D″ schneiden, so ist:

$$A(Y''MYB) = \frac{\sin A(YY'')\sin A(MB)}{\sin A(YM)\sin A(BY'')} = \frac{\cos 2\varphi \cos\gamma}{\cos(\alpha+\varphi)\cos(\beta+\varphi)}.$$

Dieser Ausdruck bleibt durch Vertauschung von α mit β ungeändert; daher

$$B(X''MXA) = \frac{\cos 2\varphi \cos\gamma}{\cos(\alpha+\varphi)\cos(\beta+\varphi)} = A(Y''MYB).$$

Ist also $\mathfrak{F}$ der Schnittpunkt von AB mit MY und $\mathfrak{G}$ der von AB mit MX, so folgt, weil $(X''MX\mathfrak{G}) = (Y''MY\mathfrak{F})$ ist,

$$\text{auch } B(Y''MY\mathfrak{F}) = A(X''MX\mathfrak{G}).$$

Da sich $A\mathfrak{G}$ und $B\mathfrak{F}$ selbst entsprechen, so müssen die Schnittpunkte der anderen Strahlen in einer Geraden liegen, d. h. AX″ und BY″, AM und BM, AX und BY schneiden sich in Punkten einer Geraden, d. h. D″, M, D liegen in einer Geraden. In Verbindung mit dem Satz in Nr. 107 Anh. folgt, daß Punkt D″ der Punkt Δ ist, so daß

hier die nähere Beziehung der Punkte D und Δ festgestellt ist, welche mit M in einer Geraden liegen. Nehmen wir für φ den Winkel ω an, so erhalten wir die Punkte S und N (Fig. 70), d. h. das Kollineationscentrum des Grunddreiecks mit dem ersten Brocardschen Dreieck, und den Punkt von Tarry. Ein ähnliches System ist M, J, Q und M, G, H.

Bem. Die Dreiecke mit den Spitzen der ähnlichen gleichschenkligen Dreiecke als Ecken sollen Kiepertsche Dreiecke heißen.

109. Zeichnet man über den Seiten des Dreiecks ABC 2 Systeme ähnlicher gleichschenkliger Dreiecke, von denen das eine System mit dem Grunddreieck in demselben Flächenteil, das andere im entgegengesetzten Flächenteil liegt, und verbindet die Ecken des Grunddreiecks mit den entsprechenden Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke beider Systeme, so schneiden sich diese Verbindungslinien in 2 Punkten der Kiepertschen Hyperbel, welche mit dem Punkte von Lemoine in einer Geraden liegen.

Bew. Da L, der Punkt von Lemoine, der Pol der Eulerschen Geraden ist, so wird jede durch L gelegte Sekante die Hyperbel in 2 Punkten treffen, welche mit den Punkten G und H ein harmonisches Viereck bestimmen, umgekehrt auch, alle Punkte der Kiepertschen Hyperbel, welche mit GH ein harmonisches Viereck bestimmen, gehen durch den Punkt von Lemoine. Sind nun X und X′ die Spitzen von 2 gleichschenkligen kongruenten Dreiecken über BC und ist X_0 der Mittelpunkt von BC, also auch von XX′, so ist A(XX′X_0H) harmonisch; nun geht AX_0 durch G, AX und AX′ schneiden die Kiepertschen Hyperbel in den Punkten D und D′, die dem Satze entsprechen, die also mit G und H ein harmonisches Viereck bilden; daher geht DD′ durch L.

Bem. Solche Punkte sind S und J, N und Q, ebenso die Winkelgegenpunkte der isodynamischen Centra. Von manchen dieser Punkte läßt sich natürlich der Beweis auf andere Weise führen.

z. B. EM ∥ HS, auch $EM = \frac{1}{2}HS$; verlängert man also HE (Fig. 70), bis es SM in ℜ schneidet, so ist HE = Eℜ, es ist also (HEQℜ) harmonisch, also auch N(HEQℜ); ebenso auch N(TELM); da NH mit NT, NM mit Nℜ übereinstimmt, NE gemeinschaftlich ist, so muß NL mit NQ übereinstimmen, d. h. N und Q liegen mit L in einer Geraden.

110. Die Mittelpunkte des Umkreises und des Feuerbachschen Kreises bilden mit dem Punkte von Lemoine ein harmonisches Tripel in Bezug auf die Kiepertsche Hyperbel.

Bew. L ist der Pol von HG; da HG aber durch MF harmonisch geteilt ist, so bilden LMF ein harmonisches Tripel.

111. Zeichnet man über den Seiten des Dreiecks ABC 2 solche Systeme ähnlicher gleichschenkliger Dreiecke, daß 2 anstoßende Seiten dieser Dreiecke über derselben Seite des Grunddreiecks senkrecht aufeinander stehen, so schneiden sich die Verbindungslinien der Ecken mit den entsprechenden Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke beider Systeme in 2 Punkten der Kiepertschen Hyperbel, die mit dem Mittelpunkte des Feuerbachschen Kreises in einer Geraden liegen.

Bew. Die Bezeichnung ist die gewöhnliche (Fig. 81). Wir wollen über BC 4 gleichschenklige Dreiecke zeichnen, je 2 über demselben Flächenteile, so daß je 2 dabei in den verschiedenen Flächenteilen kongruent sind; die Winkel an der Basis der Dreiecke über denselben Flächenteilen ergänzen sich zu 90^0; sind also X, ξ, X' ξ' die Spitzen, so ist $B(XC) = B(CX') = \varphi$, $B(\xi'C) = B(C\xi') = 90^0 - \varphi$, also $B(X\xi') = B(\xi X') = 90^0$. Ähnliche Dreiecke werden über den andern Seiten errichtet. Es schneiden sich dann AX, BY, CZ in D, $A\xi$, $B\eta$, $C\zeta$ in Δ, AX', BY', CZ' in D', $A\xi'$, $B\eta'$, $C\zeta'$ in Δ', welche Punkte auf der Kiepertschen Hyperbel liegen. Da nun $D\Delta$ durch M, $\Delta\Delta'$ durch L geht, so muß $\Delta'D$ durch F gehen, weil MLF ein harmonisches Tripel ist. Ebenso geht natürlich $\Delta'D'$ durch M, DD' durch L und $\Delta D'$ durch F. Die Punkte D, D' Δ, Δ' bilden ein solches Viereck der Kiepertschen Hyperbel, daß die Diagonalpunkte des Vierecks M, L, F sind; daher geht NJ, SQ, auch HG durch F.

112. Der Mittelpunkt des Brocardschen Kreises, der Pol der Brocardschen Linie in Bezug auf den Brocardschen Kreis und der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises bilden ein harmonisches Tripel in Bezug auf die Kiepertsche Hyperbel.

Bew. Unter der Bezeichnung von Fig. 70 sind K, T und F diese Punkte. FT schneide HK in U, dann ist

(KUJH) harmonisch, denn T(KUJH) = T(MFGH), also geht die Polare von K durch U, da aber K auf ML liegt, d. h. der Polare von F, so geht die Polare von K auch durch F, also ist FU oder FT die Polare von K; da aber KT die Polare von F ist, so auch T der Pol von FK.

113. Die Polare vom Mittelpunkt der Distanz der Brocardschen Punkte ist die Parallele zum Brocardschen Durchmesser durch den Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises.

Bew. EHS (Fig. 70) ist ein Dreieck, in welchem QG die Seiten EH und ES parallel zu HS schneidet; da HQGS ein Viereck auf der Kiepertschen Hyperbel ist, und die Diagonalen HG und QS sich in F schneiden, so geht die Polare von E durch F, dieselbe muß aber

parallel zu ML sein, da sie durch den Schnittpunkt von HS mit QG geht, welche sich in der Unendlichkeit schneiden.

114. Der Pol der Verbindungslinie FS, d. h. des Mittelpunktes vom Brocardschen Kreise mit dem Kollineationscentrum des ersten Brocardschen Dreiecks mit dem Grunddreieck ist der Spiegelpunkt des Punktes von Lemoine in Bezug auf die Verbindungslinie der Brocardschen Punkte.

Bew. (Fig. 70). HGNQ bilden ein harmonisches Viereck auf der Kiepertschen Hyperbel, also ist Q(HGNQ) harmonisch. Dies Büschel lassen wir durch LM schneiden und bezeichnen mit V den Schnittpunkt von ML mit der Tangente in Q. Wir finden dann (E, ∞, L, V) harmonisch, d. h. LV muß durch E halbiert werden.

Bem. SF geht durch Q; da V der Pol von SQ ist, so sind VS und VQ Tangenten der Kiepertschen Hyperbel; daher ist der Schnittpunkt von SV mit HL der Pol von HS.

NB. Es ist leicht, noch andere Gebilde zu finden, die Pol und Polare sind, doch würde dies zu weit führen.

115. Bestimmt man 2 solche Systeme von Spitzen gleichschenkliger ähnlicher Dreiecke über den Seiten, daß die Winkel an der Grundlinie sich zu 90^0 ergänzen, so bestimmen diese Spitzen 2 Dreiecke mit folgender Eigenschaft: Verbindet man eine Ecke des Grunddreiecks mit der entsprechenden Ecke eines Kiepertschen Dreiecks, so steht diese Verbindungslinie senkrecht zu der Seite des zweiten Kiepertschen Dreiecks, die der entsprechenden Ecke dieses Dreiecks gegenüberliegt.

Bew. Die beiden Dreiecke seien (Fig. 81) XYZ und $\xi\eta\zeta$. Es ist nun $X\zeta^2 = XB^2 + B\zeta^2 - 2XB \cdot B\zeta \cos B(X\zeta)$.

Es ist aber, wenn $B(AZ) = \varphi$, also $B(A\zeta) = 90^0 - \varphi$ ist,

$$B(X\zeta) = \varphi + 90^0 - \varphi - \beta = 90^0 - \beta,$$

$$XB = \frac{a}{2\cos\varphi}, \quad B\zeta = \frac{c}{2\sin\varphi}, \quad \text{also}$$

$$X\zeta^2 = \frac{a^2}{4\cos^2\varphi} + \frac{c^2}{4\sin^2\varphi} - \frac{2ac\sin\beta}{4\sin\varphi\cos\varphi}, \quad \text{ebenso}$$

$$X\eta^2 = \frac{a^2}{4\cos^2\varphi} + \frac{b^2}{4\sin^2\varphi} - \frac{2ab\sin\gamma}{4\sin\varphi\cos\varphi}, \quad \text{also}$$

$$X\eta^2 - X\xi^2 = \frac{b^2 - c^2}{4\sin^2\varphi}.$$

Es ist dann leicht zu finden

$$A\zeta^2 = \frac{c^2}{4\sin^2\varphi},\quad A\eta^2 = \frac{b^2}{4\sin^2\varphi},\quad \text{also}$$

$$A\eta^2 - A\zeta^2 = \frac{b^2 - c^2}{4\sin^2\varphi} = X\eta^2 - X\zeta^2.$$

Hieraus folgt sofort $AX \perp \xi\eta$. Ebenso ist natürlich $A\xi \perp YZ$.

Dies ergiebt die einfache Folgerung: Fällt man von den Ecken eines Grunddreiecks die Lote auf die entsprechenden Seiten eines Kiepertschen Dreiecks, so schneiden sich dieselben in einem Punkte, welcher das Kollineationscentrum des Grunddreiecks mit demjenigen Kiepertschen Dreieck ist, das durch gleichschenklige Dreiecke erhalten wird, deren Basiswinkel die den zum andern Kiepertschen Dreieck gehörigen Basiswinkel zu 90° ergänzen.

116. Bestimmt man 2 Kiepertsche Dreiecke durch solche gleichschenklige Dreiecke, daß die Basiswinkel sich zu 90° ergänzen, so steht die Verbindungslinie der Kollineationscentra senkrecht zur gemeinsamen Kollineationsachse dieser Dreiecke mit dem Grunddreiecke (Artzt, Untersuchungen über ähnliche Punktreihen u. s. w.)

Bew. Zum Beweise wenden wir Satz 2 in Nr. 92 an. Die Kiepertschen Dreiecke sind wieder XYZ und $\xi\eta\zeta$; dieselben erfüllen die Bedingungen dieses Satzes. Die Spitzen liegen nämlich in den Loten, die von M auf die Seiten des Grunddreiecks gefällt werden. Es schneiden sich ferner (Nr. 115 Anh.) die von A, B, C auf die entsprechenden Seiten von XYZ gefällten Lote in Δ, die von A, B, C auf die entsprechenden Seiten von $\xi\eta\zeta$ gefällten Lote in D, während die Kollineationsachse von XYZ und $\xi\eta\zeta$ zugleich Kollineationsachse des Grunddreiecks mit einem dieser Dreiecke ist, nämlich ABC; daher ist $D\Delta \perp ABC$.

Als besondern Fall finden wir, daß die Gerade MN, welche den Mittelpunkt des Umkreises mit dem Punkte von Tarry verbindet, senkrecht zur Kollineationsachse des Grunddreiecks mit dem ersten Brocardschen Dreiecke ist. Nr. 24 Anh.

117. Folgerungen für einige specielle Fälle.

Von besonderer Bedeutung ist zunächst der Fall, wenn der Winkel an der Basis 60°, der entsprechende also 30° beträgt. Wegen einiger besondern Folgerungen seien noch die Bezeichnungen, die übrigens den frühern entsprechen, angegeben. Das Grunddreieck ist ABC u. s. w.; die Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke mit dem Winkel 60° an der Basis seien X, Y, Z; die Spitzen der Dreiecke mit dem Winkel 30° aber ξ, η, ζ (Fig. 82). AX, BY, CZ schneiden sich in D; $A\xi$, $B\eta$, $C\zeta$ in Δ. Es seien ferner $X'Y'Z'$ und $\xi'\eta'\zeta'$ die durch die Spitzen in dem

entgegengesetzten Flächenteile erhaltenen Dreiecke; AX', BY', CZ' schneiden sich in D', Aξ', Bη', Cζ' in Δ'. Aus dem allgemeinen Satz folgt, daß AD ⊥ ηζ, AΔ ⊥ YZ, ebenso AD' ⊥ η'ζ' und AΔ' ⊥ Y'Z' u. s. f.

Es ist nicht schwer, manche der angegebenen Eigenschaften für diesen Fall einfacher zu beweisen; wir nehmen dazu den Beweis, daß AD ⊥ ηζ ist.

η ist der Mittelpunkt des Umkreises von ACY, der noch durch D geht, ebenso ζ der Mittelpunkt des Umkreises von ABDZ, daher AD ⊥ ηζ.

Wir merken noch folgende Sätze:

a) Im Dreieck ξηζ sind M und D, ebenso in ξ'η'ζ' sind M und D' Winkelgegenpunkte. Der Beweis ist für beide Dreiecke durchaus entsprechend; es genügt daher einer. Es ist
ζ'(Aη') = ζ'(η'D'), ζ'(AM) = ζ'(η'ξ') = 60°, also
ζ'(Aη') = ζ'(Mξ'), also auch ζ'(η'D') = ζ'(Mξ'), was zu beweisen war, da für die andern Ecken dasselbe gilt.

b) Es ist Δ der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises von XYZ und Δ' der von X'Y'Z'.

Leicht findet man AZ' = XY', AY' = XZ'; daher halbieren sich AX und Y'Z' in U gegenseitig. Da nun Xξ = ξξ', so ist ξU ∥ Aξ' und da Aξ' ⊥ Y'Z', so ist ξU ⊥ X'Z'. Fällt man noch von X' das Lot X'U' auf Y'Z', so ist X'U' ∥ ξ'A ∥ ξU, also da X'ξ' = ξ'ξ ist, so ist ξ' und somit auch Δ' von U' und U gleich weit entfernt oder Δ' liegt in dem Lote, das in der Mitte der Strecke U'U errichtet ist. Wegen der Bedeutung der Punkte U' und U ist dies das Lot, welches durch den Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises geht. Da Δ' symmetrisch für die Seiten des Dreiecks X'Y'Z' liegt, so ist △' der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises.

Nimmt man als Basiswinkel 45° an, so ergeben sich ebenfalls noch einige merkwürdige Folgerungen. Wir sehen zunächst jedes Dreieck als ein doppeltes an, bei welchem sich dann die Winkel zu 90° ergänzen. Die Punkte, in welchen die durch M gelegte Sekante die Hyperbel schneidet, fallen in einen zusammen, d. h. die Sekante wird zur Tangente.

a) Dies giebt den Satz: Konstruiert man über den Seiten eines Dreiecks ABC nach beiden Flächenteilen gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke und verbindet die Ecken des Grunddreiecks mit den entsprechenden Spitzen dieser Dreiecke, so schneiden sich die Verbindungslinien in Punkten der Kiepertschen Hyperbel, welche die Berührungspunkte der Tangenten vom Mittelpunkt des Umkreises an die Hyperbel sind.

Ferner stehen die anstoßenden Seiten von 2 Dreiecken über derselben Seite senkrecht zu einander; daher muß die Verbindungslinie jener Hyperbelpunkte durch den Mittelpunkt F des Feuerbachschen Kreises gehen; weil die Dreiecke aber auch gleiche Winkel haben, so muß die

Verbindungslinie auch durch den Punkt L von Lemoine gehen. Diese Eigenschaft folgt übrigens auch daraus, daß LF die Polare von M ist.

118. Die Differenz der Kiepertschen gleichseitigen Dreiecke ist gleich dem Grunddreieck.

Bew. Man ersieht leicht (Fig. 82), daß das eine Dreieck gleichwendig, das andere gegenwendig zum gegebenen Dreieck ist. Geben wir den Dreiecken noch Zeichen, so würden wir sagen, die allgebraische Summe der beiden Dreiecke ist gleich dem Grunddreieck. Nach Nr. 49 Anh. ergiebt sich:

$$\xi'\eta'\zeta' = \frac{\triangle\,(2\sin\omega + \sin(60^0 - \omega))}{3\sin\omega},$$

$$\xi\eta\zeta = \frac{\triangle\,(2\sin\omega - \sin(60^0 + \omega))}{3\sin\omega},$$

$$\text{also}\quad \xi'\eta'\zeta' + \xi\eta\zeta = \frac{\triangle}{3\sin\omega}\left\{4\sin\omega - 2\cos 60^0 \sin\omega\right\} = \triangle.$$

119. Die Brocardschen Punkte sind die Brennpunkte einer Ellipse, welche die Seiten des Dreiecks in den Fußpunkten der Symmedianen berührt. Dieselbe heißt Brocardsche Ellipse.

Bew. (Fig. 70). Daß die Brocardschen Punkte als Brennpunkte einer die Seiten des Dreiecks berührenden Ellipse angesehen werden können, folgt daraus, daß sie Winkelgegengunkte sind, die stets innerhalb des Dreiecks liegen. Unter Annahme der bekannten Bezeichnung ist dann nur zu beweisen:

$$L_\alpha(L'B) = L_\alpha(CL''),$$

da die Leitstrahlen von den Brennpunkten gleiche Winkel mit der Tangente des betreffenden Punktes bilden. Nun ist

$$BL' = \frac{c\sin\omega}{\sin\beta},\quad CL'' = \frac{b\sin\omega}{\sin\gamma},\quad \text{also}$$

$$\frac{BL'}{CL''} = \frac{c\sin\gamma}{b\sin\beta} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Ebenso ist $\frac{BL_\alpha}{L_\alpha C} = \frac{c^2}{b^2}$ und ferner $B(L'L_\alpha) = C(L''L_\alpha) = \omega$

daher $BL'L_\alpha \infty CL''L_\alpha$, also $L_\alpha(L'B) = L_\alpha(CL'')$.

Die Elemente derselben berechnen sich leicht; sind nämlich a und b die Achsen, c die lineare Excentricität, so ist

$$c = \tfrac{1}{2}L'L'' = r\sin\omega\sqrt{1 - 4\sin^2\omega}.$$

$$b^2 = L'L'_a \cdot L''L''_a = 4r^2\sin^4\omega,\quad \text{also}\quad b = 2r\sin^2\omega,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = r^2\sin^2\omega,\quad \text{also}\quad a = r\sin\omega.$$

Druck von Leonhard Simion, Berlin SW.

Verlag von **Leonhard Simion** in Berlin SW., Wilhelmstraße 121.

Für den Schulgebrauch bestimmte Bücher der Herren

Prof. Dr. H. Lieber,
Oberlehrer
am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium in Stettin

und

F. v. Lühmann,
Oberlehrer
am Gymnasium in Königsberg i. d. Neumark.

Leitfaden der Elementar-Mathematik.

Vollständig in 3 Teilen.

I. Planimetrie.
Siebente Auflage. IV u. 99 S.
6 Figurentafeln.
Preis 1 Mark 50 Pf.

II. Arithmetik.
Vierte Auflage. IV und 120 S.
Preis 1 Mark 25 Pf.

III. Ebene Trigonometrie, Stereometrie, Sphärische Trigonometrie.
Vierte Auflage. IV u. 84 S. 2 Figurentafeln.
Preis 1 Mark 25 Pf.

Trigonometrische Aufgaben.

Dritte Auflage.
Mit einer Figurentafel. VIII und 298 S. gr. 8°.
Preis 4 Mark.

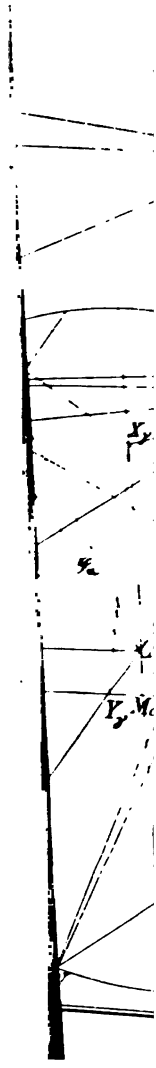
Geometrische Konstruktions-Aufgaben.

Neunte Auflage.
Mit einer Figurentafel. XII und 206 S. gr. 8°.
Preis 2 Mark 70 Pf.

Stereometrische Aufgaben.

Herausgegeben
von
Prof. Dr. H. Lieber,
Oberlehrer am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium in Stettin.
VI und 144 Seiten.
Preis 2 Mark 40 Pf.

§.74.



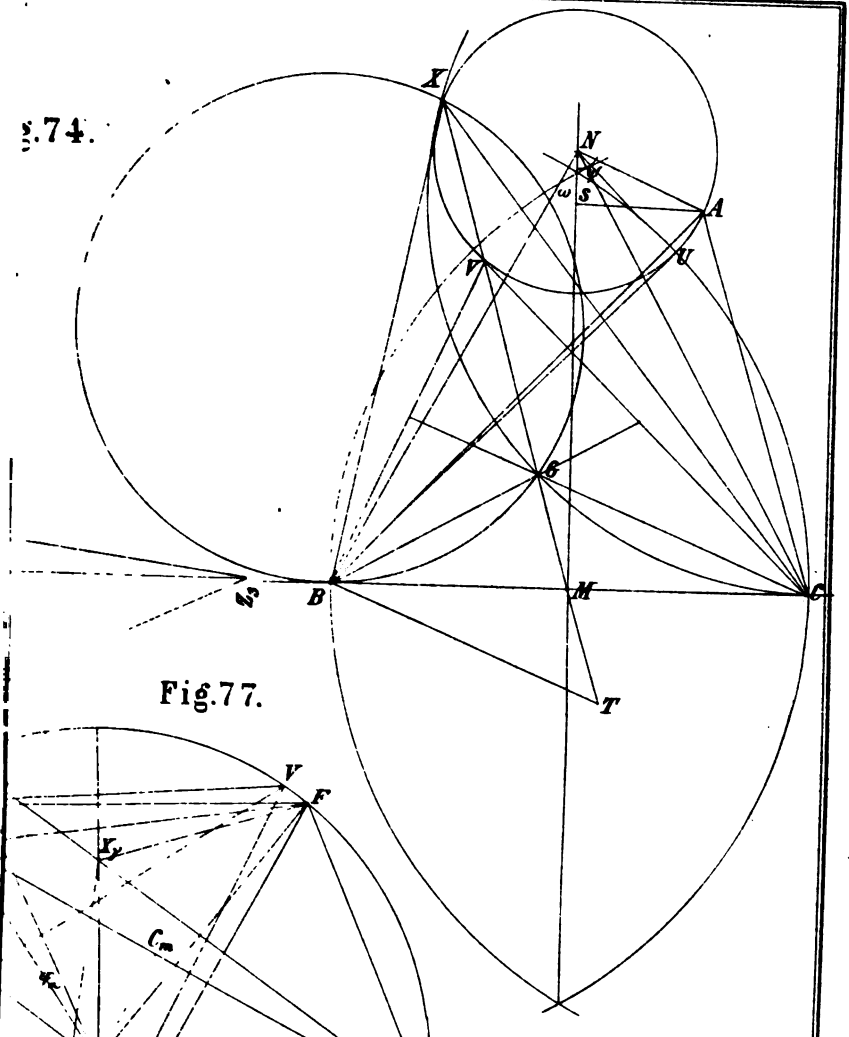


Fig. 74.

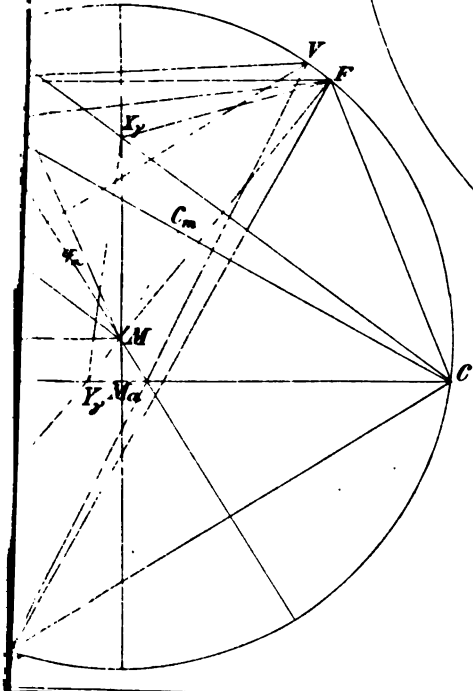


Fig. 77.

Fig. 75.

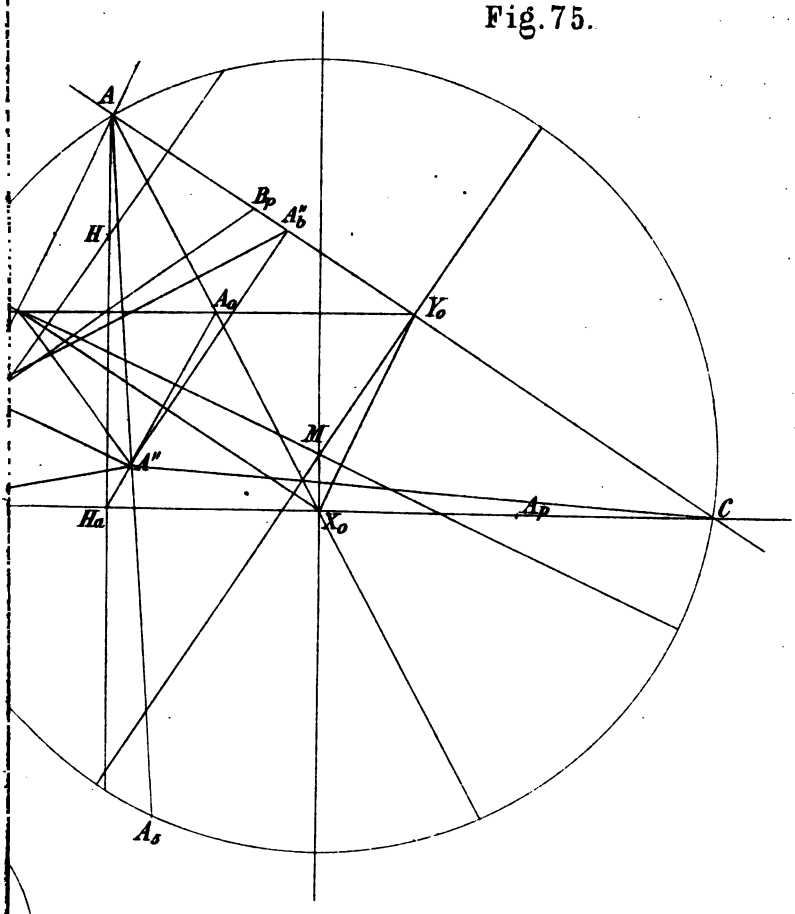


Fig. 79.

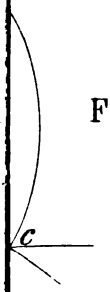


Fig. 35.

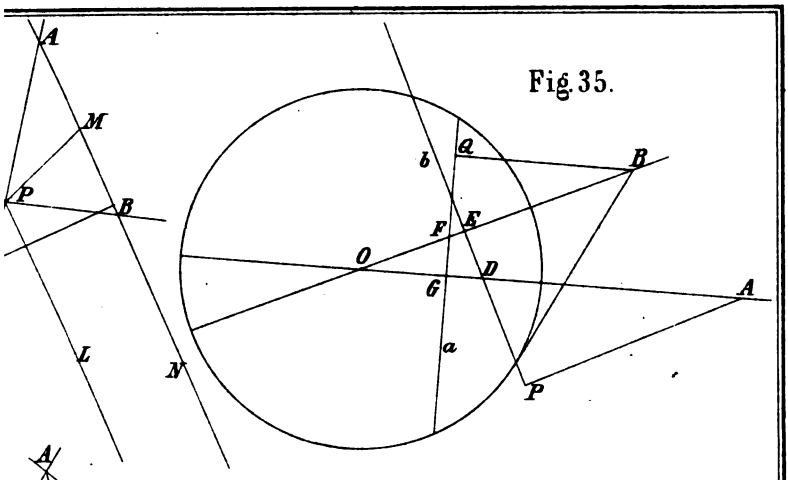


Fig. 39.

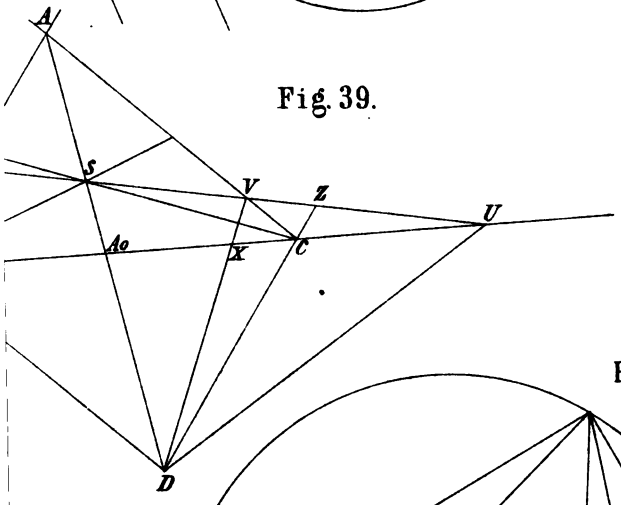


Fig. 37.

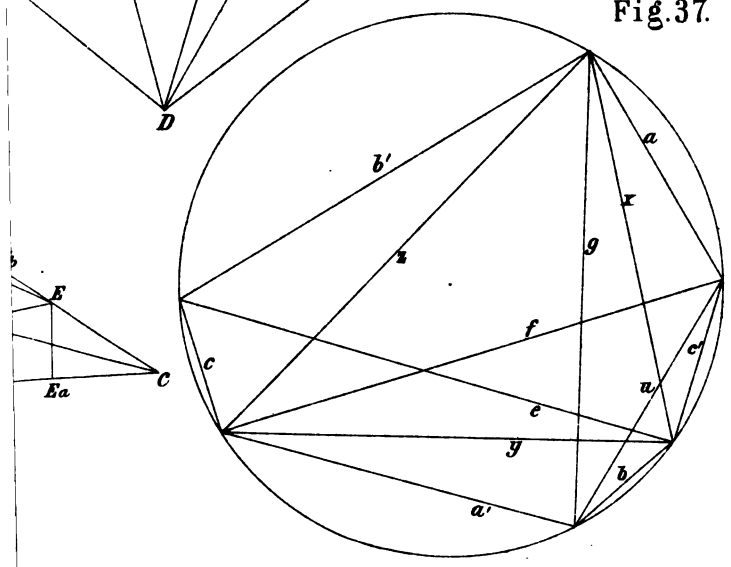
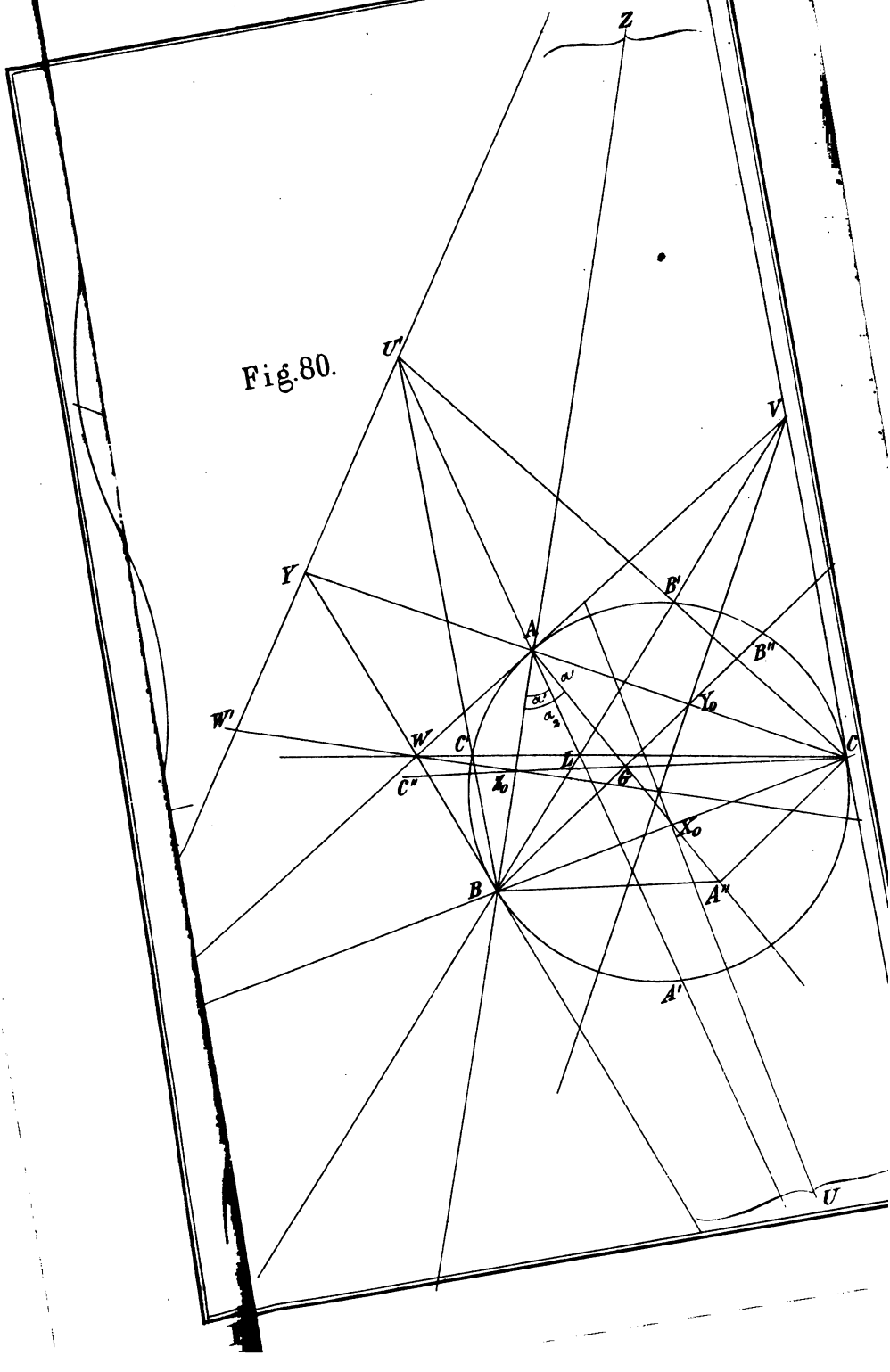
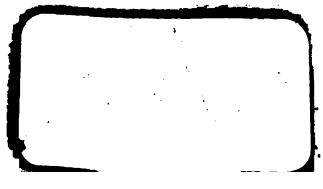


Fig.80.



MAY 18 1911



Math 5238.90
Synthetische Beweise planimetrische
Cabot Science
003338751
3 2044 091 905 802